Lehrstuhl A für Mathematik — Aachen, den 30.1.2001
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Thorsten Heck

6. Übung „Topologische Vektorräume“

(Abgabe: 13.2.2001 vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei (F, G) ein Dualsystem, $A \subset F$ und D die kreisförmige Hülle von A (siehe Lemma I.3). Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $A^0 = D^0$,

b) $A = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad A^0 = G$,

c) $A = F \quad \Leftrightarrow \quad A^0 = \{0\}$. $\boxed{6}$

Aufgabe 2: Beweisen Sie Lemma II.18:
Sei f ein stetiger linearer Operator von E in F, wo E und F lokalkonvexe Hausdorffräume mit topologischen Dualräumen E' und F' seien. Dann ist f auch stetig als Abbildung von $(E, \sigma(E, E'))$ in $(F, \sigma(F, F'))$.

$\boxed{3}$

Aufgabe 3: Beweisen Sie Lemma III.1: Sei E ein lokalkonvexer Raum und $\mathcal{U}$ eine Nullumgebungsbasis aus absolut konvexen und absorbierenden Mengen. Weiter sei $\mathcal{Q}$ eine Familie von Halbnormen auf E, die die Topologie von E erzeugt. Für eine bel. Teilmenge $B \subset E$ sind äquivalent:

a) B ist beschränkt.

b) B wird von jeder Nullumgebung absorbiert.

c) Zu jedem $U \in \mathcal{U}$ existiert ein $\varrho > 0$, so dass $B \subset \varrho U$.

d) Für jede Halbnorm $\varrho \in \mathcal{Q}$ ist $\varrho(B)$ eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}$.

$\boxed{5}$

Aufgabe 4: Beweisen Sie Folgerung Ⅲ.1 und Lemma Ⅲ.4:
Sei (F, G) ein Dualsystem und $B \subset F$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) B ist $\sigma(F, G)$-beschränkt.

b) Für alle $y \in G$ ist $\langle B, y \rangle := \{\langle x, y \rangle \,;\, x \in B\}$ beschränkt in $\mathbb{K}$.

c) $q(y) := \sup\{|\langle x, y \rangle| \,;\, x \in B\}$ ist eine Halbnorm auf G.

d) B^0 ist eine absorbierende Teilmenge von G.

$\boxed{7}$

Definition: *Für einen topologischen Vektorraum E ist die Dimension* $\dim E$ *definiert als die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren. Für einen Vektorunterraum M ist die Codimension* $\operatorname{codim} M$ *definiert als die Dimension von E/M.*

Aufgabe 5: Zeigen Sie für einen Hausdorffraum E die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) Jeder Unterraum endlicher Codimension ist dicht in E.

b) Es existiert keine abgeschlossene Hyperebene in E.

c) Kein endlich-dimensionaler Unterraum M besitzt einen komplementären Unterraum, d.h. es existiert kein $M \subset E$ mit $\dim M < \infty$, so dass ein Unterraum $N \subset E$ existiert mit $E = M \oplus N$. $\boxed{7}$

Definition: *Ein lokalkonvexer Raum heißt* <u>*bornologisch*</u>*, falls jede absolut konvexe Menge, die alle beschränkten Mengen absorbiert, eine Nullumgebung ist.*

Aufgabe 6:

a) Zeigen Sie, dass Lemma III.3 nicht umkehrbar ist, d.h. dass lokalkonvexe Räume E, F und eine beschränkte lineare Abbildung f von E in F existieren, so dass f nicht stetig ist.

b) Seien E, F lokalkonvexe Räume und f eine beschränkte lineare Abbildung von E in F. Sei B eine Teilmenge von F, die alle beschränkten Teilmengen absorbiert. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(B)$ alle beschränkten Mengen in E absorbiert.

c) Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (i) E ist bornologisch;

   (ii) Für jeden lokalkonvexen Raum F gilt: Alle beschränkten linearen Abbildungen $f : E \to F$ sind stetig.

$\boxed{9}$

Hinweis zu a): Man wähle für F einen unendlich dimensionalen Banachraum $(E, \|\cdot\|_E)$ und für E den Raum $(E, \sigma(E, E'))$, wobei E' der topologische Dualraum von $(E, \|\cdot\|_E)$ ist. Der Beweis, dass $f = id$ nicht stetig ist, kann dann z. B. für

$$E = L^2_{2\pi} \text{ mit } \|x\|_{L^2_{2\pi}} = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} | \, x(t) \, |^2 \, dt \right\}^{1/2} \text{ geführt werden.}$$

Aufgabe 7:

a) Zeigen Sie, dass die kreisförmige Hülle und der Abschluß einer präkompakten Menge $A \subset E$ eines topologischen Vektorraumes E präkompakt sind. (Hinweis: Es darf benutzt werden, dass $E_1 \times E_2$ ein topologischer Vektorraum ist, falls E_1 und E_2 topologische Vektorräume sind.)

b) Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Zeigen Sie: Ist $A \subset E$ präkompakt, dann ist $\operatorname{conv}(A)$ i.allg. nicht präkompakt und nicht beschränkt. (Hinweis: Man betrachte $A := \left\{ n^{-1/2} (\delta_{kn})_{k \in \mathbb{N}};\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset l^{1/2}$)

$\boxed{8}$

Aufgabe 8: Beweisen Sie Lemma III.25: Sei E lokalkonvex und $A \subset E$. Äquivalent sind die folgenden Aussagen:

(i) A ist präkompakt;

(ii) Jeder Filter $\mathcal{F}$ mit $A \in \mathcal{F}$ besitzt eine Verfeinerung, die Cauchy-Filter ist.

(iii) Jeder Ultrafilter $\mathcal{F}$ mit $A \in \mathcal{F}$ ist Cauchy-Filter.

$\boxed{4}$

Aufgabe 9: Zeigen Sie am Beispiel des Dualsystems (c_0, l^1), dass Vollständigkeit nicht invariant unter kompatiblen Topologien ist. (Die Kompatibilität der Normtopologie von c_0 muß nicht bewiesen werden.)

$\boxed{4}$

Definition: *a) Sei E ein topologischer Vektorraum und $A \subset E$. A heißt eine <u>Tonne in E</u>, falls A absolut konvex, absorbierend und abgeschlossen ist.*

b) Ein lokalkonvexer Raum E heißt <u>tonneliert</u>, wenn jede Tonne eine Nullumgebung ist.

Definition: *Ein lokalkonvexer Raum $(E, \mathcal{T})$ heißt <u>absolut stark</u>, falls $\mathcal{T} = \beta(E, E')$, wobei E' der topologische Dualraum von E ist.*

Aufgabe 10:

a) Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie: E ist tonneliert genau dann, wenn E absolut stark ist.

b) Sei E ein tonnelierter Hausdorffraum mit topologischem Dualraum E'. Zeigen Sie:
Die abgeschlossene konvexe Hülle jeder $\sigma(E', E)$-kompakten Teilmenge von E' ist $\sigma(E', E)$-kompakt, ebenso die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle.

(Hinweis: Verwenden Sie Folg. III.9)

$\boxed{3}$