Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Thorsten Heck

Aachen, den 14.11.2000

# 2. Übung „Topologische Vektorräume“

(Abgabe: 28.11.2000 <u>vor</u> der Vorlesung)

**Aufgabe 1:** Geben Sie ein Beispiel an für einen topologischen Vektorraum $E$ und eine Menge $A \subset E$, die kreisförmig aber nicht Nullumgebung ist. $\boxed{2}$

**Definition:** *Sei $E$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt <u>ausgeglichen</u>, falls zu jedem $x \in E$ ein $\lambda > 0$ existiert, so daß $x \in \lambda A$.*

**Aufgabe 2:** Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen

a) $A$ absorbierend $\Longrightarrow$ $A$ ausgeglichen,

b) $A$ ausgeglichen $\Longrightarrow$ $A$ absorbierend. $\boxed{2}$

**Aufgabe 3:** Sei $E$ ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$; $A \subset E$. Zeigen Sie:

a) Ist $A$ konvex, kreisförmig, absolut konvex oder absorbierend, so besitzt die Abschließung $\overline{A}$ von $A$ jeweils dieselbe Eigenschaft. $\boxed{5}$

b) Ist $A$ konvex, so auch ihr Inneres $\text{int}A$. $\boxed{1}$

c) Falls zusätzlich $0 \in \text{int}A$, so impliziert die Kreisförmigkeit oder die absolute Konvexität von $A$ dieselbe Eigenschaft für $\text{int}A$. $\boxed{2}$

**Aufgabe 4:** Sei $E$ ein topologischer Vektorraum und $A \subset E$ absorbierend. Beweisen oder widerlegen Sie in diesem Fall

a) $0 \in \text{int}A$.

b) $\text{int}A$ ist absorbierend. $\boxed{3}$

**Aufgabe 5:** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $C(\mathbb{R}, \mathbb{K}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K};\ f \text{ stetig}\}$ und
$p_n(f) := \max_{t \in [-n,n]} |f(t)|$, $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie: Der Raum $C(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ bildet unter der durch die Halbnormen $p_n(f)$ induzierten Topologie einen lokalkonvexen, metrisierbaren Hausdorffraum, welcher aber nicht normierbar ist. $\boxed{4}$

**Definition:** *Sei $E \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.*

a) *Eine Mengenfamilie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E) := \{A;\ A \subset E\}$ heißt ein Filter auf $E$, falls gilt:*

$F_1$) $\mathcal{F} \neq \emptyset;\ \emptyset \notin \mathcal{F}$,

$F_2$) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,

$F_3$) $A \in \mathcal{F}$ *und* $B \supset A$ *mit* $B \subset E \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$.

b) *Eine Mengenfamilie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ heißt eine Filterbasis auf $E$, falls gilt:*

$FB_1$) $\mathcal{B} \neq \emptyset;\ \emptyset \notin \mathcal{B}$,

$FB_2$) *Falls* $A, B \in \mathcal{B} \Longrightarrow \exists\ C \subset A \cap B$, *so dass* $C \in \mathcal{B}$.

**Aufgabe 6:** Sei $E$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $\mathcal{N}$ eine Filterbasis auf $E$ mit den Eigenschaften

$NU_1$) Jedes $U \in \mathcal{N}$ ist absorbierend.

$NU_2$) Jedes $U \in \mathcal{N}$ ist kreisförmig.

$NU_3$) Zu jedem $U \in \mathcal{N}$ existiert ein $V \in \mathcal{N}$ mit $V + V \subset U$.

Zeigen Sie:

a) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und zu jedem $U \in \mathcal{N}$ existiert ein $V \in \mathcal{N}$, so dass $\sum_{i=1}^{n} V := V + \sum_{i=1}^{n-1} V \subset U$.

b) Zu jedem $\alpha \in \mathbb{K}$ und $U \in \mathcal{N}$ existiert ein $V \in \mathcal{N}$, so dass $\alpha V \subset U$. $\boxed{4}$

**Aufgabe 7:** Sei $E$ ein Vektorraum und $\mathcal{N}$ eine Filterbasis mit den Eigenschaften $NU_1$) – $NU_2$).
Zeigen Sie: Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $E$, so dass $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $\mathcal{N}$ eine Nullumgebungsbasis ist. $\boxed{6}$

**Aufgabe 8:** Zeigen Sie, dass der topologische Vektorraum

$$\ell^p := \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}\ ;\ x_k \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

für $0 < p < 1$ unter der Metrik $d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p$ nicht lokalkonvex ist. $\boxed{4}$

**Aufgabe 9:** Sei $E$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Weiter seien $A, B \subset E$ absolut konvexe und absorbierende Teilmengen von $E$ und $p_A(x) := \inf\{\lambda,\ \lambda > 0,\ x \in \lambda A\}$ das Minkowski– Funktional von $A$. Zeigen Sie:

a) Falls $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so gilt: $p_{\alpha A}(x) = \frac{1}{|\alpha|} p_A(x)$ für alle $x \in E$.

b) $p_{A\cap B}(x) = \max\{p_A(x), p_B(x)\}$ für alle $x \in E$.

c) Falls $A \subset B$, so gilt $p_B(x) \leq p_A(x)$ für alle $x \in E$.

d) Sei $B \subset E$ derart, dass gilt

$$\{x \in E;\ p_A(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in E;\ p_A(x) \leq 1\}.$$

Dann gilt: $p_B(x) = p_A(x)$ für alle $x \in E$. $\boxed{4}$