Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
S. Bauer

Aachen, den 4.12.2000

7. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 11.12.2000, vor der Übung)

Aufgabe 1: Prüfen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die durch

$$a_n = n\sqrt{\alpha^2 n^2 + 2\alpha} - \sqrt{n^4 + (\alpha^2+1)n^2 - 1}$$

gegebene Folge konvergiert. Geben Sie jeweils den Grenzwert an, wenn er existiert.

Aufgabe 2: *
Zeigen Sie, daß die durch $a_1 = 1/2$ und $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert a. (Hinweis: Berechnen Sie zuerst den möglichen Grenzwert a.)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie durch Anwendung des Satzes über monotone und beschränkte Folgen, daß die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert a.

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}\sqrt{a_n^2+1}$;

b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1$;

c) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = a_n(2-a_n)$.

Anleitung: a) Zeigen Sie: $a_n \geq \frac{2}{\sqrt{5}}$ und $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
b) Zeigen Sie: $a_n \leq 2$ und $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
c) Zeigen Sie: $a_n \leq 1$ und $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4: * Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wie müssen a und b gewählt werden, damit das Gleichungssystem eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzt?

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 5 \\ 2x - 3y + 2z &= 13 \\ -x + 5y + (2b+2)z &= a - 5. \end{aligned}$$

Hinweis: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem auf bekannte Weise, und unterscheiden Sie daraufhin die Fälle $b = 1$ und $b \neq 1$.

Aufgabe 5: * Bestimmen Sie alle $x \in [-7, 3]$, für die

$$||9 - 3x| + |x + 7| - 12| \geq 1$$

gilt.

Aufgabe 6: Die Fischpopulation eines Sees betrage anfangs $a_0 = 8000$ Fische. Der jährliche Wachstumssatz liege bei 5%; außerdem werde am Ende eines jeden Jahres der Bestand um
a) 300; b) 400; c) 500
Fische vermindert. Wie entwickelt sich der Fischbestand in den nächsten Jahren?

Aufgabe 7: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, daß folgende Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Gültigkeit besitzt.

$$A(n) := \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Lösung zur Aufgabe 6b der Übung 5:
Behauptung: $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.
1) $\underline{0} \in U$, denn $0 + 0 = 0 \Rightarrow U \neq \emptyset$
2) Seien $\underline{a}, \underline{b} \in U \Rightarrow a_1 + a_2 = a_3$ und $b_1 + b_2 = b_3$. Damit ergibt sich sofort $\underline{a} + \underline{b} \in U$, denn $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = a_3 + b_3$.
3) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{a} \in U \Rightarrow a_1 + a_2 = a_3$. Man erhält somit $\lambda\underline{a} \in U$, denn $\lambda a_1 + \lambda a_2 = \lambda(a_1 + a_2) = \lambda a_3$.