Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
S. Bauer

Aachen, den 20.11.2000

5. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 27.11.2000, vor der Übung)

Aufgabe 1: * Gegeben sind die Vektoren $\underline{a} = (2, 3, -1)$, $\underline{b} = (1, -1, 1)$ und $\underline{c} = (1, 4, -2)$.
a) Sind $\underline{a}$ und $\underline{b}$ linear unabhängig?
b) Sind $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ linear unabhängig?
c) Bestimmen Sie alle Vektoren $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, für die $\underline{a} \cdot \underline{x} = 5$, $\underline{b} \cdot \underline{x} = 2$ und $\underline{c} \cdot \underline{x} = 6$ gilt.

Aufgabe 2: * Bestimmen Sie die Komponenten $a_1 (\leq 0), a_2$ des Vektors $\underline{a} = (a_1, a_2, -6, 4, -2)$ mit $|\underline{a}| = 9$ und b_3, b_4, b_5 des Vektors $\underline{b} = (20, -15, b_3, b_4, b_5)$, welcher ein Vielfaches des Vektors $\underline{a}$ ist.

Aufgabe 3: * Gegeben sind die Vektoren $\underline{a} = (2, 3, 6), \underline{b} = (1, 2, 3), \underline{c} = (1, 1, 1)$ und $\underline{d} = (2, 4, 8)$. Sind die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ linear abhängig? (Wenn ja, stellen Sie $\underline{d}$ als Linearkombination der Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ dar.) Sind die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ linear unabhängig? Welche der folgenden Mengen bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und welche ist kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?
$\{\underline{a}, \underline{b}\}$; $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$; $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}$

Aufgabe 4: Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ gegeben, je zwei von ihnen sind linear unabhängig. Dann ist $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 5:

a) Bilden die folgenden drei Vektoren eine Basis im $\mathbb{R}^3$?

$$\underline{a}_1 = (1, 0, 2),\ \underline{a}_2 = (0, -1, 1),\ \underline{a}_3 = (3, -1, 1)$$

b) Bilden die folgenden vier Vektoren eine Basis im $\mathbb{R}^4$?

$$\underline{b}_1 = (3, 1, 0, 2),\ \underline{b}_2 = (-1, 1, 1, 9),\ \underline{b}_3 = (3, -1, 1, 0),\ \underline{b}_4 = (0, 0, 0, 0)$$

c) Bilden die folgenden drei Vektoren ein Erzeugendensystem im $\mathbb{R}^3$?

$$\underline{c}_1 = (4, 3, -2),\ \underline{c}_2 = (-2, -1, -2),\ \underline{c}_3 = (2, 3, -10)$$

d) Bilden die folgenden drei Vektoren ein Erzeugendensystem im $\mathbb{R}^3$?

$$\underline{d}_1 = (4, 3, -2),\ \underline{d}_2 = (-2, -1, -2),\ \underline{d}_3 = (2, 3, 0)$$

Aufgabe 6: Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$

b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$

c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$

Lösungen zur Übung 3:

Aufgabe 2: Man benötigt 0,0024 g Natriumazid.

Aufgabe 3: a)$\mathbf{L} = \{\mathbf{n} \in \mathbb{N}; \mathbf{n} > \mathbf{3}\}$

Aufgabe 5:

ii) $\mathbf{L} = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}; \mathbf{x} = \frac{\mathbf{9-3z}}{\mathbf{2}}, \mathbf{y} = \frac{\mathbf{7+z}}{\mathbf{2}}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}\right\}$

iii) $\mathbf{L} = \{(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2})\}$

iv) Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung, d.h. $\mathbf{L} = \emptyset$.

Aufgabe 6:

b) $\mathbf{L} = \{-\mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{0}\}$

c) $\mathbf{L} = \left\{-\mathbf{1} - \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}}, -\mathbf{1} + \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right\}$

d) $\mathbf{L} = \{\mathbf{2}, -\mathbf{2}, \mathbf{3}, -\mathbf{3}\}$

f) $\mathbf{L} = \emptyset$

g) $\mathbf{L} = \emptyset$

h) $\mathbf{L} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \leq \mathbf{1}\}$

j) $\mathbf{L} = \{\mathbf{0}\}$