LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Bauer

Aachen, den 6.11.2000

3. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 13.11.2000, vor der Übung)

Aufgabe 1: * 500 ml YEPG-Medium enthalten: 10 g Glucose, 5 g Pepton, 2,5 g Hefeextrakt und 10 g Agar-Agar in Wasser gelöst. Für eine Petrischale benötigt man 20 ml Medium. Wieviel Medium muß man ansetzen, um 15 solcher Schalen gießen zu können, welche Mengen muß man einwiegen?

Aufgabe 2: Wieviel Natriumazid wird benötigt, um 12 ml einer 0,02 % Lösung herzustellen?

Aufgabe 3: Für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Ungleichungen:

a) $n^2 - 1 > \dfrac{(n+1)^2}{2}$ b)* $3^n > n^3$ c)* $\binom{2n}{n} \geq 2^n$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$.

Aufgabe 4:
Sei m eine fest vorgegebene natürliche Zahl. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}\binom{k}{m} = \frac{1}{m}\binom{n}{m}.$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, die folgende Gleichungen erfüllen:

i)* $\begin{aligned} 3x + 4y + z &= 23 \\ x + 2z &= 12 \\ y + z &= 8 \end{aligned}$

ii) $\begin{aligned} x + y + z &= 8 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 17 \end{aligned}$

iii) $\begin{aligned} 2x + y + z &= 8 \\ x + 2y + z &= 8 \\ x + y + 2z &= 8 \end{aligned}$

iv) $\begin{aligned} x + y - 2z &= 3 \\ x + 3y + z &= 10 \\ x + y - z &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

a)* $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 = -6x$

c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+3)^2 \cdot x$

d) $x^4 + 36 = 13x^2$

e) $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$

f) $\sqrt{4x^2} - x + 2 = 0$

g) $\sqrt{2x^2 + 3} + x = 0$

h) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x - 1 = 0$

i)* $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$

j) $\frac{3x^2 + 4}{3x - 2} = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

k) $\sqrt{4x^2} - x + 2 = 0$

Lösung zu Aufgabe 3 der Übung 1: Für die angegebenen Mengen A, B und C gilt:
$A := \{2, 4, 6, \ldots\} = \{2k; k \in \mathbb{N}\}, B := \{3, 6, 9, \ldots\} = \{3k; k \in \mathbb{N}\}$ und
$C := \{6, 12, 18, \ldots\} = \{6k; k \in \mathbb{N}\}$.
Betrachte nun die Verknüpfung "$\cup$" für alle möglichen Paare der Mengen A, B, C:

$$A \cup B = \{2 + 6k, 3 + 6k, 4 + 6k, 6 + 6k; k \in \mathbb{N}_0\},$$

$$A \cup C = \{2 + 6k, 4 + 6k, 6 + 6k; k \in \mathbb{N}_0\} = A \Rightarrow C \subset A,$$

$$B \cup C = \{3 + 6k, 6 + 6k; k \in \mathbb{N}_0\} = B \Rightarrow C \subset B.$$

Für die Verknpfung "$\cap$" ergeben sich folgende Ergebnisse:

$$A \cap B = \{6 + 6k; k \in \mathbb{N}_0\} = C,$$

$$A \cap C = \{6 + 6k; k \in \mathbb{N}_0\} = C,$$

$$B \cap C = \{6 + 6k; k \in \mathbb{N}_0\} = C.$$

Wegen der Gültigkeit des Kommutativgesetzes für "$\cup$" und "$\cap$", ist es ausreichend die obigen Paare von Mengen zu betrachten. Berücksichtigt man, daß das Kommutativgesetz bei der Differenzbildung von Mengen im Allgemeinen nicht gilt, ergibt sich:

$$A \backslash B = \{2 + 6k, 4 + 6k; k \in \mathbb{N}_0\} = A \backslash C,$$

$$B \backslash A = \{3 + 6k; k \in \mathbb{N}_0\} = B \backslash C,$$

$$C \backslash A = \emptyset = C \backslash B.$$

Zum Distributivgesetz: Mit obigen Ergebnissen ergibt sich: $(A \cup B) \cap C = \{6 + 6k; k \in N_0\} = C$ und $(A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cup C = C$. Damit ist das Distributivgesetz für die speziellen Mengen A, B, C gültig.