Lehrstuhl A für Mathematik — Aachen, den 16. Februar 2001
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

16. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, den 20.04.2001, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f((x,y,z)^{tr}) := x^2 + xy - y - z, \quad g((x,y,z)^{tr}) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Man zeige, dass

$$M := \{(x,y,z)^{tr} \in \mathbb{R}^3; f((x,y,z)^{tr}) = g((x,y,z)^{tr}) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und dass

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) := (t, t^2, t^3)^{tr}$$

eine (globale) Parameterdarstellung von M ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, seien definiert durch

$$\begin{aligned} f_1((x_1,x_2,x_3,x_4)^{tr}) &:= x_1x_3 - x_2^2, \\ f_2((x_1,x_2,x_3,x_4)^{tr}) &:= x_2x_4 - x_3^2, \\ f_3((x_1,x_2,x_3,x_4)^{tr}) &:= x_1x_4 - x_2x_3. \end{aligned}$$

Man zeige, dass

$$M := \{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}; f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)
Man berechne Maßtensoren und Gramsche Determinanten zu den folgenden Karten.

a) $\varphi : (0;\infty) \to V \subset M \subset \mathbb{R}^2$ mit
$\varphi(t) = (t, e^t)^{tr}, \quad M := \{(x,y)^{tr} \in \mathbb{R}^2;\, e^x - y = 0\}$.

b) $\varphi : \mathbb{R} \times (0;\pi/2) \to V \subset M \subset \mathbb{R}^3$ mit
$\varphi(t_1,t_2) = (t_1, \sin t_2, 2t_1 \sin t_2)^{tr}, \quad M := \{(x,y,z)^{tr} \in \mathbb{R}^3;\, 2xy - z = 0\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Gegeben sei die Karte

$$\varphi : (r;R) \times (0;H) \to \mathbb{R}^3, \quad 0 < r < R < \infty,\ H > 0,$$

durch

$$\varphi(t_1,t_2) = (t_1 \cos t_2, t_1 \sin t_2, ht_2)^{tr},\ h > 0.$$

Man berechne die Fläche der 2–dimensionalen Wendelfläche, die durch diese Karte beschrieben wird.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Es sei A die bzgl. der Polarkoordinaten (t_1, t_2) auf der Einheitssphäre $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ (vgl. Beispiel (2.4) für die genauen Definitionen der Polarkoordinaten und der Menge S_2) durch die Ungleichungen

$$\varphi_1 \le t_1 \le \varphi_2, \quad \theta_1 \le t_2 \le \theta_2$$

gegebene Teilmenge $(0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi, \quad 0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi)$. Man berechne ihre Fläche.

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Man berechne die Fläche des Rotationsellipsoids

$$M := \left\{ (x, y, z)^{tr} \in \mathbb{R}^3; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1 \right\}, \quad a, b > 0.$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Sei M eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine integrierbare Teilmenge. Sei

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad F(x) := Tx + q$$

eine Bewegung ($q \in \mathbb{R}^n$ und $T \in \mathcal{O}(n)$ eine orthogonale Matrix). Man zeige, dass $F(A)$ eine integrierbare Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $F(M) \subset \mathbb{R}^n$ ist mit

$$vol_k(F(A)) = vol_k(A).$$

Organisatorisches: Diese Übung wird in der ersten Übungsstunde des nächsten Semesters vorgerechnet. Hier sind zur Erinnerung die Klausurtermine für die vorlesungsfreie Zeit

2. Klausur Analysis III	Mittwoch, 28.02.2001, 14.00 Uhr	Hörsaal EpH
Vordiplom Analysis I/II	Dienstag, 06.03.2001, 09.00 Uhr	Hörsaal Fo4
3. Klausur Analysis III	Mittwoch, 11.04.2001, 10.00 Uhr	Hörsaal II

und weitere wichtige Termine:

Fragestunde zu Analysis I/II	Donnerstag,	01.03.2001, 10.00 Uhr	Hörsaal III
Rückgabe 2. Klausur Analysis III	Montag,	05.03.2001, 11.00 Uhr	HG 248
Rückgabe Analysis I/II	Mittwoch,	07.03.2001, 11.00 Uhr	HG 248
Fragestunde zu Analysis III	Mittwoch,	04.04.2001, 10.00 Uhr	Hörsaal III
Rückgabe 3. Klausur Analysis III	Mittwoch,	17.04.2001, 11.00 Uhr	HG 248

Für weitere Informationen und mögliche Änderungen schauen Sie bitte in den Schaukasten des Lehrstuhl A.

Euer Analysis-Team wünscht Euch eine schöne vorlesungsfreie Zeit und viel Erfolg bei Euren Klausuren.