

15. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, den 09.02.2001, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Gegeben sei eine lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in Form einer positiv definiten $n \times n$ -Matrix.

(i) Man zeige für $\gamma > 0$:

$$\text{vol}\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t S x \leq \gamma^2\} = \text{vol}\{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \leq \gamma^2\},$$

falls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von S sind.

(ii) Man berechne $\text{vol}\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t S x \leq \gamma^2\}$.

Bemerkung: Man nennt diese Menge einen *Ellipsoiden*

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Berechnen Sie mittels der Transformationsformel und des Diffeomorphismus Φ der Polarkoordinaten das folgende Integral:

$$\int_K \sqrt{x^2 + y^2} d\lambda_2,$$

wo $K = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Beachten Sie hierbei den Bildbereich von Φ !

Aufgabe 3 (3+3+2+2+3+3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_M \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2} d\lambda_3,$

$$M = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}, a, b, c > 0.$$

b) $\int_M x^2 y d\lambda_3, M = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$

c) $\int_M |x|(1 - x^2 - (y - 1)^2) d\lambda_2,$

$$M = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2; y \geq x + 1, x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$$

d) $\int_M |x| d\lambda_3, M = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z \leq 2y, y \geq x + 1, z \geq 0\}.$

e) $\int_M x_3 x_4^3 d\lambda_4, M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4; 0 \leq x_4 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 1\}.$

f) $\int_M 1 d\lambda_3,$

$$M = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x + y \leq 4 - (x - y)^2, x^2 + y^2 \leq z \leq 2(1 + x + y)\}.$$

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^2$, $M \in \mathcal{B}$. Man nennt

$$\nu(M) = \int_M y^{-2} d\lambda_2$$

die *hyperbolische Fläche* von M .

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Man berechne die hyperbolische Fläche der Menge

$$F := \left\{ (x, y)^t \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}, x^2 + y^2 \geq 1 \text{ und } x^2 + y^2 > 1 \text{ für } -\frac{1}{2} < x \leq 0 \right\}$$

und zeichne F .

Bemerkung: Die obengenannte Menge ist ein sogenannter exakter Fundamentalbereich für die Operation der Gruppe $SL(2, \mathbb{Z})$ auf der oberen Halbebene (in $\mathbb{C}$), d.h. es existiert genau ein Vertreter aus jeder Bahn dieser Operation in F , aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{C}$. Sie spielt eine große Rolle in der Theorie der elliptischen Modulformen.

Sei $\tau = x + iy$, $y > 0$ und $M \in SL(2, \mathbb{R})$. Dann ist die Operation auf τ folgendermaßen definiert:

$$M < \tau > := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Es gilt $\nu(M < F >) = \nu(F)$ für alle $M \in SL(2, \mathbb{R})$.