Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 26. Januar 2001

14. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, den 02.02.2001, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 ((3+6)+4 Punkte)
Seien $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative stetige Funktion und

$$F := \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq f(x),\ \text{ wobei } x \in [a; b]\}.$$

Dann ist F messbar nach XIII (3.14). Durch eine Rotation um die x-Achse entsteht aus F der Drehkörper

$$D := \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3;\ (x, \sqrt{y^2 + z^2})^t \in F\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Nach Beispiel XIV (4.4) ist D messbar und es gilt

$$\lambda_3(D) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

(i) Man berechne die Volumina der beiden Drehkörper, die durch Drehung der Menge

$$F = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 6\pi,\ 0 \leq y \leq 2 + \cos x\}$$

um die x-Achse bzw. um die y-Achse entsteht. Man skizziere die Drehkörper.

(ii) Man berechne das Volumen des Torus mit den Radien r und R mit $r \leq R$, also des Körpers, der durch eine Drehung der Menge

$$F = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2 + (y - R)^2} \leq r\}$$

um die x-Achse entsteht. Skizze?

Aufgabe 2 (4+3 Punkte)
Sei $f : M \times D \to \mathbb{R}$ mit $M := [0; 1]$, $D := (-1; 1)$, definiert durch

$$f(x, t) = \begin{cases} 0 & ,\quad x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x} + |t|} & ,\quad 0 < x \leq 1 \end{cases} ,\quad -1 < t < 1.$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$F(t) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + |t|},\quad -1 < t < 1,$$

stetig ist ohne b) zu verwenden.

(ii) Man berechne $F(t)$ für $-1 < t < 1$ und zeige so die Stetigkeit.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Man berechne das Volumen des Durchschnitts der beiden Kreiszylinder, die durch $x^2 + y^2 \leq 1$ bzw. $y^2 + z^2 \leq 1$ beschrieben werden, mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips.

Aufgabe 4 (5 Punkte) (ehemalige Klausuraufgabe)
Sei $f : [a, b] \to (0, \infty)$ stetig. Dann gilt

$$\left(\int_{[a;b]} f \, d\lambda \right) \left(\int_{[a;b]} \frac{1}{f} \, d\lambda \right) \geq (b-a)^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie geschickt die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischen Mittel.

Zusatzaufgabe (5* Punkte)
Berechnen Sie mit dem Cavalierischen Prinzip:
a) den Flächeninhalt einer Ellipse $\left\{ (x, y)^t \in \mathbb{R}^2 ; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$.
b) das Volumen eines Ellipsoiden $\left\{ (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 ; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}$.