Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner Aachen, den 19. Januar 2001

13. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, den 26.01.2001, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (1+2+4 Punkte)
Sei $M \in \mathcal{B}$, $f : M \to \mathbb{R}$. Man beweise oder widerlege:

a) Ist f Lebesgue-integrierbar, so auch $|f|$.

b) Ist $|f|$ Lebesgue-integrierbar, so auch f.

c) Sei $M = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$, $A_j \in \mathcal{B}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Wenn $f|_{A_j}$ Lebesgue-integrierbar ist und $\sum_{j=0}^{\infty} \int_{A_j} f \, d\lambda$ absolut konvergiert, so ist f Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_M f \, d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{A_j} f \, d\lambda.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Man gebe ein Beispiel für eine Folge $(f_k)_{k \geq 1}$ Lebesgue- integrierbarer Funktionen an, die dem Maße nach gegen die Nullfunktion streben, die aber keine Lebesgue- integrierbare Majorante besitzen. Die Zahlenfolge $(\int_M f_k \, d\lambda)_{k \geq 1}$ kann divergent sein.

Aufgabe 3 (3+2+2 Punkte) Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $f_k : [-1;1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = -1, x = 1 \\ \frac{1}{k}(1 - |x|)^k & , \quad x \in (-1;1) \end{cases} , \qquad k \in \mathbb{N}.$$

a) Man zeige mittels des Satzes über die majorisierte Konvergenz:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{[-1;1]} f_k \, d\lambda = 0.$$

b) Überprüfen Sie das Ergebnis aus a) durch explizite Berechnung von $\int_{[-1;1]} f_k \, d\lambda$!

c) Kann zur Begründung der Aussage in a) auch der Satz über die monotone Konvergenz verwendet werden?

Aufgabe 4 (7 Punkte)
Man berechne das LEBESGUE-Integral der folgenden Funktion mit Hilfe der Definiton (XIV (1.6)), falls es existiert:
Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Hinweise (nicht zu beweisen):
a) Das Volumen eines Kreises im $\mathbb{R}^2$ ist gleich dem Produkt von π und dem Radius zum Quadrat.
b)

$$\frac{1}{k+1} < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} < \frac{1}{k}.$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Man bestimme, ob die folgende numerische Funktion quasi-integrierbar ist und berechne gegebenenfalls den Wert des Integrals:
$f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{x} & x \in [\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}) \setminus \mathbb{Q}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \infty & \mathbb{Q} \cap [0; 1] \end{cases}$$