Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 22. Dezember 2000

12. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, den 19.01.2001, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Die Funktionenfolge $(f_k)_{k\geq 1}$, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sei gegeben durch

$$f_k(x) = \chi_{[k;k+1]}(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass $(f_k)_k$ punktweise auf $\mathbb{R}$ konvergiert und dass für $0 < \eta < 1$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} \,|\, |f_k(x)| \geq \eta\}) = 1.$$

Warum ist dies kein Widerspruch zu Übung 11, Aufgabe 2?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei F eine nichtleere abgeschlossene Menge reeller Zahlen und $f : F \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $g(x) = f(x)$ für alle $x \in F$ gilt.
Hinweis: Man definiere $g(x)$ auf den Intervallen, aus denen F^C zusammengesetzt ist, geeignet.

Aufgabe 3 (5 Punkte) **(Vorstufe zum Satz von Lusin)**
Sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit der Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k\, \chi_{A_k}(x) \qquad (x \in [a;b])$$

mit $\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k = [a;b]$ und paarweise disjunkten Mengen $A_k \in \mathcal{B}$. Man zeige, dass dann für jedes $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lambda(\{x \in [a;b];\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Hinweis: Man benutze Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (7 Punkte) **(Satz von Lusin)**
Sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ eine (beliebige) messbare Funktion. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\lambda(\{x \in [a;b];\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon\,.$$

Hinweis: Man benutze Aufgabe 3, den Satz von Egoroff und schließlich wieder die Aufgabe 2.

Aufgabe 5 (4+4 Punkte)
Man berechne das Lebesgue-Integral der folgenden Funktionen mit Hilfe der Definition (XIV (1.6)), falls es existiert:
a)

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = x_1 \chi_{[0;1]^n}(x),$$

b)

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^{-1} \chi_{(0;\infty)}(x).$$