LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 15. Dezember 2000

10. Übung zur Analysis III

Abgabe: Montag, den 08.01.2001, 10.00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Man berechne das LEBESGUEsche Maß der (kompakten) zweidimensionalen CANTORschen Menge. Dabei entsteht die CANTORsche Menge aus dem Einheitsquadrat

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\},$$

indem man das offene Quadrat $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ entfernt. Mit den verbleibenden, angrenzenden $8\,(8^2, 8^3, ...)$ Quadraten der Kantenlänge $\frac{1}{9}\,(\frac{1}{9^2}, \frac{1}{9^3}, ...)$ verfährt man entsprechend.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass für alle $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ und für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{x \in M | f(x) = c\} \in \mathfrak{M}.$$

Beweisen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass die umgekehrte Richtung nicht gilt.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ messbare Mengen mit endlichem Maß. Zeigen Sie, dass $A \times B$ messbar in $\mathbb{R}^2$ ist mit $\lambda_2(A \times B) = \lambda_1(A) \cdot \lambda_1(B)$.

Aufgabe 4 (4+5 Punkte)
Sei D_0 das Innere des durch die folgenden Funktionsgraphen eingeschlossenen Gebietes des $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ll} f_1 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}, & y \mapsto 1 - \sqrt{-x}, \\ f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, & y \mapsto 1 - \sqrt{x}, \\ f_3 : [-2; 2] \to \mathbb{R}, & y \mapsto \sqrt{3} - \sqrt{4 - x^2}. \end{array}$$

Weiter sei $D_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n D_0 + d_n$ mit $d_n = \frac{7}{12} + \frac{2}{3}d_{n-1}$, $d_0 = 0$.
a) Zeichnen Sie die Menge $D := \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ mit einem Computerprogramm (z.B. Maple). Dabei dürfen sie bei geeignet großem n abbrechen.
b) Zeigen Sie, dass D messbar ist und berechnen Sie die Fläche von D.
c*) Vervollständigen Sie das Bild mit Hilfe eines Quaders Q. Was ist zu sehen?