LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 08. Dezember 2000

9. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, 15.12.2000, 10.00 Uhr

Aufgabe 1 (7 Punkte)
Man berechne das LEBESGUEsche Maß des offenen Dreiecks

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; 0 < y < x,\ x < a \right\},$$

$a > 0$ konstant mit Hilfe von Korollar (3.12).

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei X eine nicht-leere Menge. Gegeben sei ein nicht-leeres Mengensystem $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $M_1, M_2 \in \mathfrak{M} \Rightarrow M_1 \cup M_2 \in \mathfrak{M}$,

(ii) $M_1, M_2 \in \mathfrak{M} \Rightarrow M_1 \backslash M_2 \in \mathfrak{M}$.

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M}$ ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ ist!

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ und es gebe disjunkte offene Mengen $U_1 \supset M_1, U_2 \supset M_2$. Zeigen Sie, dass für das äußere LEBESGUEsche Maß gilt:

$$\lambda^*(M_1 \cup M_2) = \lambda^*(M_1) + \lambda^*(M_2).$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ LEBESGUE-messbar. Zeigen Sie:
Es existieren zwei messbare Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit

A ist abzählbare Vereinigung kompakter Mengen,
B ist abzählbare Vereinigung offener Mengen,
$A \subset M \subset B$,
$\lambda(A) = \lambda(M) = \lambda(B)$.

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Man zeige mit Hilfe von $\lambda^*(M) = \inf\{\lambda(U); M \subset U \subset \mathbb{R}^n, U \text{ offen}\}$, dass $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge ist.