Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 01. Dezember 2000

8. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, 08.12.2000, 10.00 Uhr

Aufgabe 1 (1+1+1+1+1 Punkte)
Sei X eine nicht-leere Menge. Für $A \subset X$ definiert man die **Indikatorfunktion** χ_A zu A durch

$$\chi_A : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & ; \quad \text{falls } x \in A \\ 0 & ; \quad \text{falls } x \notin A \end{cases}.$$

Zeigen Sie für $A, B \subset X$:

a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.

c) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$.

d) $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_{A\cap B}$.

e) $A \subset B \iff \chi_A \leq \chi_B$, d.h. $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Man zeige, dass der Durchschnitt zweier kompakter Quader im $\mathbb{R}^n$ wieder ein kompakter Quader ist und dass die Vereinigung zweier kompakter Quader als endliche Vereinigung kompakter Quader dargestellt werden kann, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei X eine nicht–leere Menge. Dann ist (laut Linerarer Algebra)

$$\mathrm{Abb}(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) := \{f : X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \;\text{ Abbildung}\}$$

bei punktweiser Addition und Multiplikation ein Ring. Zeigen Sie, daß dann auch $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ ein Ring ist, der zu $(\mathrm{Abb}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), +, \cdot)$ isomorph ist. Wie sehen Null– und Einselement aus? Welche Teilmengen besitzen ein Inverses?
<u>Hinweis:</u> Vermeiden Sie das explizite Nachrechnen der Ringaxiome.

Aufgabe 4 (2+4+(1+2+1+1*)+2+5* Punkte)
Sei $\mathfrak{M}_R := \{A \subset \mathbb{R}; l(A) := \int_\infty^\infty \chi_A(x)\,dx \text{ existiert}\}$ das System der **Riemann–messbaren Teilmengen von** $\mathbb{R}$. Man nennt $l(A)$ die **Länge** von A. Zeigen Sie:

a) $\mathfrak{M}_R$ ist ein Unterring von $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \Delta, \cap)$.

b) Sei $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar. Es gilt:

$$A \text{ besitzt keinen Häufungspunkt} \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathfrak{M}_R.$$

In diesem Fall gilt $l(A) = 0$. Gilt die Umkehrung?

c) l ist additiv, translationsinvariant und normiert auf $\mathfrak{M}_R$, d.h.

(i) $A, B \in \mathfrak{M}_R,\ A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathfrak{M}_R \quad$ und $\quad l(A \cup B) = l(A) + l(B).$

(ii) $A \in \mathfrak{M}_R,\ q \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad q + a \in \mathfrak{M}_R \quad$ und $\quad l(q + A) = l(A).$

(iii) $l([0;1]) = 1.$

(iii)' Allgemeiner gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$l([a;b]) = l([a;b)) = l((a;b]) = l((a;b)) = b - a.$$

d) $\mathfrak{M}_R$ ist nicht abgeschlossen gegenüber abzählbarer Vereinigung.

e)* Seien A_j, $j \geq 1$ paarweise disjunkte Mengen in $\mathbb{R}$ mit $A_j \in \mathfrak{M}_R$ und $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}_R$. Man zeige, dass dann sogar (beachte Teil c) (i)) gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} l(A_j) = l(A).$$

Hinweis: Die Sätze der Vorlesung über die Vertauschung von Summation und Integration sind nicht anwendbar. Benutze stattdessen den folgenden

Satz: (Arzela, Osgood, Lebesque)

Sei $f_n \in \mathcal{R}[a;b]$, $n \in \mathbb{N}$, $[a;b]$ ein endliches Intervall. f_n konvergiere gegen f auf $[a;b]$ punktweise mit $f \in \mathcal{R}[a;b]$ und $(f_n)_n$ sei gleichgradig beschränkt auf $[a;b]$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Dabei sei $\mathcal{R}[a;b]$ die Menge der über $[a;b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen. Einen Beweis für diesen Satz findet man z.B. bei Apostol: Mathematical Analysis. Einen vergleichbaren Satz findet man auch bei Barner-Flohr: Analysis I.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Ein *Würfel* $W = \bigotimes_{i=1}^{n} I_i$ *der Dimension* n ist ein beschränkter Quader, für den die Länge der Intervalle I_i konstant ist. Ist für $A \subset \mathbb{R}^n$ das *äußere Würfelmaß* definiert als

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(W_j) \mid W_j \text{ Würfel}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j \right\},$$

so zeige man:

$$\lambda^*(A) = \mu^*(A) \quad \text{für alle} \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$