Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 17. November 2000

6. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, 24.11.2000, 10.00 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte): Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to Mat(n \times n; \mathbb{K})$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen.
Ist $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen DGL $y' = A(x) \cdot y$, so erhält man alle Lösungen $\Psi(x)$ von $y' = A(x)y + b(x)$ durch ($c \in \mathbb{K}^n$, $x, x_0 \in I$)

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot c + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_j(u)}{W(u)}\, du,$$

wobei $W(u) := \det(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u))$ und $W_j(u) := \det(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_{j-1}(u), b(u),$ $\varphi_{j+1}(u), \ldots, \varphi_n(u))$ sind.

Aufgabe 2 (5+3 Punkte):

(i) Man berechne $e^{xA}, x \in \mathbb{R}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Man löse

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3 + 2e^x \\ y_2' &= y_2 + e^{-x} \\ y_3' &= y_1 - 2e^x. \end{aligned}$$

Dazu verschaffe man sich über den Exponentialansatz eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Mit Aufgabe 3 Übung 5 löse man das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' + y' + y = \cos x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Aufgabe 4 (4+3 Punkte):

(i) Ist λ ein Eigenwert der reellen, konstanten $n \times n$–Matrix A und v ein Hauptvektor (k-ter Stufe) von A zu λ ($k \in \mathbb{N}$), also

$$(A - \lambda E)^k v = 0$$

mit $v \neq 0$ und $(A - \lambda E)^{k-1} v \neq 0$, dann ist

$$\varphi(x) = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(A - \lambda E)^j v}{j!} x^j$$

eine nichttriviale Lösung von $y' = A \cdot y$.

(ii) Ist A eine beliebige, reelle, konstante $(n \times n)$-Matrix und λ ein Eigenwert von A der Vielfachheit k, dann existieren genau k (komplex) linear unabhängige Hauptvektoren von A zu λ (maximal k-ter Stufe).

A hat n (komplex) linear unabhängige Hauptvektoren.

Aufgabe 5 (5+3 Punkte): Man löse die DGL $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}.$$