LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 21.06.2002

9. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 28.06.2002, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Gl(2,\mathbb{R})$ und auf $\mathbb{R}^2$ sei die Äquivalenzrelation R definiert durch

$$(x,y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x = y \vee x = Ay \qquad (x,y \in \mathbb{R}^2).$$

a) Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^2/R$ auf die Menge der ungeordneten Paare $\{x_1,x_2\}$ mit $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ gibt.

b) Sei $Q := \{(x_1,x_2)^t \in \mathbb{R}^2; x_1 \leq x_2\}$ mit der Relativtopologie von $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat})$ und $\mathbb{R}^2/R$ mit der Quotiententopologie bezüglich $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat})$ versehen. Zeigen Sie:

$$f : Q \to \mathbb{R}^2/R, x \mapsto f(x) := [x]_R, x \in Q$$

ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 2: Seien $[0,1] \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ jeweils mit der natürlichen Topologie versehen, $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig und $A \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $f(0) \in A$ und $f(1) \in \mathbb{R}^n \setminus A$, so gibt es ein $t_0 \in [0,1]$ mit $f(t_0) \in \partial A$.

Aufgabe 3: In einem topologischen Raum $\underline{X}$ nennt man $A \subset X$ eine **Zerlegungsmenge** von X, falls A offen und abgeschlossen ist. Für $x \in X$ heißt

$$Q(x) := \bigcap \{A \in \mathcal{P}(X); x \in A, A \text{ Zerlegungsmenge von } X\}$$

die **Quasikomponente von** x. Zeigen Sie:

a) Für jedes $x \in X$ ist $Q(x)$ abgeschlossen in $\underline{X}$.

b) $X = \bigcup_{x \in X} Q(x)$ und für $x,y \in X$ gilt entweder $Q(x) = Q(y)$ oder $Q(x) \cap Q(y) = \emptyset$.

c) Für jedes $x \in X$ gilt $\mathcal{C}(x) \subset Q(x)$.

d) $\mathcal{C}(x)$ ist genau dann offen, wenn $Q(x)$ offen ist. In diesem Fall gilt $\mathcal{C}(x) = Q(x)$.

Aufgabe 4: Sei $\underline{X}$ ein topologischer Raum. Bestimmen Sie die Zusammenhangskomponenten von $\underline{X}$ in den folgenden Fällen:

a) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A = \{U \subset X; A \subset U \text{ oder } U = \emptyset\}$ für $A \subset X$.

b) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ist eine Partitionstopologie auf X.