LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 07.06.2001

7. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 14.06.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $I \neq \emptyset$ und $(f_i : X \to Y)_{i \in I}$ die Familie aller stetigen Abbildungen von X in Y sowie $\mathcal{T}$ die Initialtopologie von $(f_i : X \to Y)_{i \in I}$.

a) Zeigen Sie: $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_X$.

b) Gilt stets $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

c) Für $\underline{X} = \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{nat}$.

d) Für $\underline{X} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat}), \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ gilt ebenfalls $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{nat}$.

Aufgabe 2*: Sei $X := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}\,;\, x_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N}\}$ versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ und $Y := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X; x_i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}\} \subset X$.

a) Zeigen Sie:

(i) Durch

$$\|x\| := \max_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \qquad (x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in Y)$$

wird eine Norm auf Y definiert. d bzw. $\mathcal{T}_d$ bezeichne die zugehörige Metrik bzw. Topologie auf $Y \times Y$ bzw. Y.

(ii) Durch $L : Y \to \mathbb{R}$,

$$Lx := \sum_{i \in \mathbb{N}} i\, x_i \qquad (x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in Y),$$

wird eine unstetige Linearform auf Y gegeben.

b) Sei $\mathcal{T}_Y$ die von $\underline{X} = (X, \mathcal{T})$ induzierte Relativtopologie auf Y. Vergleichen Sie $\mathcal{T}_Y$ mit $\mathcal{T}_d$, d.h. untersuchen Sie ob $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_d$ oder $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_Y$ gilt.

Aufgabe 3: Ist die nicht-euklidische Ebene (vgl. Übung 2, Aufgabe 3*) ein topologischer Unterraum von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{nat})$ für ein $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 4: Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Einbettung** von $\underline{X}$ in $\underline{Y}$, wenn f ein Homöomorphismus von $\underline{X}$ auf den topologischen Unterraum $\underline{f(X)}$ von $\underline{Y}$ ist. Zeigen Sie, dass f genau dann eine Einbettung ist, wenn gilt:

(i) f ist injektiv,

(ii) f ist stetig und

(iii) für jedes offene $U \subset X$ ist $f(U)$ offen in $\underline{f(X)}$.