LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 10.05.2001

4. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 17.05.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Betrachten Sie den Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$.

a) Ist in diesem Raum das erste oder zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt?
Hinweis: Siehe **Beispiel (2.16)** im Skript!

b) Gibt es eine Pseudometrik d auf $\mathbb{R}$ derart, dass $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{cof}$ gilt? (Antwort mit Beweis!)

Aufgabe 2*: Sei Z eine nichtleere Menge und $X := Z^{\mathbb{N}} = \{(z_i)_{i\in\mathbb{N}} : z_i \in Z \, \forall i \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Folgen in Z. Für $z = (z_i)_{i\in\mathbb{N}}, w = (w_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$ setze dann

$$d(z,w) := \begin{cases} 0 & \text{falls } z = w, \\ 2^{-j},\ j := \min\{i \in \mathbb{N} : z_i \neq w_i\} & \text{falls } z \neq w. \end{cases}$$

Zeigen Sie: d ist eine Metrik auf X, welche sogar die ultrametrische Ungleichung erfüllt.

Aufgabe 3: Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

a) Durch $d' := \dfrac{d}{1+d}$ wird auf X eine Metrik definiert.

b) d und d' induzieren dieselbe Topologie, d.h. es gilt $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

c) d und d' sind genau dann äquivalent, wenn d beschränkt ist.

Aufgabe 4:

a) Sei X eine nichtleere Menge und ρ eine Abbildung von $X \times X$ in $\mathbb{R}$. Setze für $x \in X,\ \varepsilon > 0$
$$S(x,\varepsilon) := \{y \in X \ : \ \rho(y,x) < \varepsilon\}\ .$$
Zeigen Sie:
$$\mathcal{T}_\rho := \{G \subset X \ : \ \forall x \in G \ \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } S(x,\varepsilon) \subset G\}$$
ist eine Topologie für X.

b) Sei nun speziell $X = \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für die Abbildungen
$$\rho_1(x,y) := x - y,\ \rho_2(x,y) := xy \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$
die folgenden Fragen:

(i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt $x \in S(x,\varepsilon)$?
(ii) Für welche $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist $S(x,\varepsilon)$ offen in der in a) beschriebenen Topologie?
(iii) Ist das System $\{S(x,\varepsilon); x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ eine Subbasis (Basis) dieser Topologie?