LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 12.07.2002

12. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 16.07.2002, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Seien $\underline{X}$ ein topologischer Raum und $\underline{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$.

a) $\underline{X}$ habe die Eigenschaft: Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$. Welche topologische Trennungseigenschaft folgt hieraus für $\underline{X}$?

b) $\underline{X}$ habe die Eigenschaft: Zu jedem $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ mit $x \neq A$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ und $f|_A = 1$. Welche topologische Trennungseigenschaft folgt hieraus für $\underline{X}$?

c) $\underline{X}$ habe die Eigenschaft: Für je zwei abgeschlossene Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Welche topologische Trennungseigenschaft folgt hieraus für $\underline{X}$?

Aufgabe 2:

a) Sei $g : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ eine Abbildung ($d \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie: Es gibt ein stetiges $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^d$.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen (mit Beweis) für die Existenz einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(a_n) = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ an.

Aufgabe 3: Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und

(i) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A := \{B; B = \emptyset \text{ oder } A \subset B \subset X\}$ für eine nicht-leere Teilmenge A von X,

(ii) $\mathcal{P}$ eine Partition von X und $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ die zugehörige Partitionstopologie auf X.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(X, \mathcal{T})$ an und bestimmen Sie die Menge der Limiten.

b) Ist $(X, \mathcal{T})$ folgenbestimmt?

Aufgabe 4: Sei $(X, \mathcal{T})$ die **nested interval topology**, d.h. $X =]0,1[$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{U_n; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ mit $U_n :=]0, 1 - 1/n[\,, n = 2, 3, 4, \ldots$. Man zeige:

a) $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf X.

b) Jede offene Teilmenge von X, außer X selbst, ist quasi-kompakt.

c) Keine abgeschlossene Teilmenge von X, außer $\emptyset$, ist quasi-kompakt.