LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 28.06.2002

10. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 05.07.2002, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $\underline{X}$ ein topologischer Raum.

a) Es seien $a, b, c \in X$ und es gebe eine Kurve von a nach b und eine Kurve von b nach c. Zeigen Sie: Es existiert eine Kurve von a nach c und eine Kurve von b nach a.

b) Zeigen Sie: Sind A, B kurvenzusammenhängende Teilmengen von X und ist $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ kurvenzusammenhängend. Genügt hierfür auch die schwächere Voraussetzung $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

c) Zeigen Sie: Jede kurvenzusammenhängende Teilmenge Y von X liegt in einer maximalen kurvenzusammenhängenden Teilmenge.

Aufgabe 2*: Gegeben sei der $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie.

a) Zeigen Sie: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist jede Zusammenhangskomponente von U offen, und es gibt höchstens abzählbar unendlich viele solche Komponenten.

b) Geben Sie eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit überabzählbar vielen Zusammenhangskomponenten an.

Aufgabe 3: a) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen wegzusammenhängende Teilmengen von $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit der natürlichen Topologie sind:
(i) die Menge $P_n(\mathbb{R})$ der positiv definiten Matrizen,
(ii) $SL_n(\mathbb{R})$ (spezielle lineare Gruppe),
(iii) $SO_n(\mathbb{R}) = \{U \in M_n(\mathbb{R}) \; ; \; UU^t = E, \; \det U = 1\}$ (spezielle orthogonale Gruppe).
b) Wie sehen die Zusammenhangskomponenten der orthogonalen Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ aus?

Aufgabe 4: Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ beliebig.
Zeigen Sie, dass es einen topologischen Raum Y und zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ gibt mit

$$\{x \in X \; ; \; f(x) = g(x)\} = A.$$

Hinweis: Wählen Sie für Y einen geeigneten Quotientenraum von $X \times \{1, 2\}$.