LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 16.04.2002

1. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 26.04.2002, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Hinweise zur Vorlesung Topologie

Vorlesungen und Übungen zur Topologie finden in den folgenden Hörsälen statt:

Mo	11.45 – 13.15	Vorlesung	Hörsaal III,
Di	11.45 – 13.15	Vorlesung	Hörsaal V,
Fr	11.45 – 13.15	Übung	Hörsaal V.
Diskussionsstunde:			
Di	14.00 – 15.30		H212.

Am 19. 4. wird anstelle der Übung eine Vorlesung stattfinden.

Übungen: Jede Woche wird freitags in der Übung ein Übungszettel ausgegeben. (Die 2. Übung gibt es am Freitag, 26. April.) Maximal zwei Personen dürfen gemeinsam abgeben. Ihre Lösungen werfen Sie bitte in den dafür vorgesehenen Kasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls A (Hauptgebäude, Raum 153). Die Übungsblätter sind auch im Internet erhältlich unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/SS02/Topologie

Die Homepage des Lehrstuhls A für Mathematik finden Sie unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de

Scheine/Klausuren: Für den Erhalt eines Scheines muss 1/3 der Übungspunkte erreicht und eine der beiden Klausuren bestanden werden. Für den (benoteten) Schein wird die bessere der beiden Klausuren gewertet.
Der durch die Klausuren erreichbare Schein zählt für Lehramtskandidaten als Leistungsnachweis. Lehramtskandidaten, die einen qualifizierten Studiennachweis erwerben wollen, müssen 50% der Übungspunkte erreichen und eine mit einem Stern gekennzeichnete Aufgabe der Übungsblätter in den Diskussionsstunden vorrechnen.

Termin der 1. Klausur:

Samstag, 13. 07. 2002, 9.00–12.00 Uhr im HS III.

Termin der 2. Klausur:

Freitag, 11. 10. 2002, 9.00–12.00 Uhr im HS III.

Aufgabe 1*: Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung, sowie $U_1, U_2 \subset X, V_1, V_2 \subset Y$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Inklusionen stets gelten (Nachweis!) und welche i.a. falsch sind (Angabe eines konkreten Gegenbeispiels!).

a) $f(U_1 \cup U_2) \subset f(U_1) \cup f(U_2) \quad , \quad f(U_1 \cup U_2) \supset f(U_1) \cup f(U_2)$,

b) $f(U_1 \cap U_2) \subset f(U_1) \cap f(U_2) \quad , \quad f(U_1 \cap U_2) \supset f(U_1) \cap f(U_2)$,

c) $f^{-1}(V_1 \cup V_2) \subset f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) \quad , \quad f^{-1}(V_1 \cup V_2) \supset f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$,

d) $f^{-1}(V_1 \cap V_2) \subset f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \quad , \quad f^{-1}(V_1 \cap V_2) \supset f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$.

Aufgabe 2:

a) Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ bestehe aus $\emptyset$, X und denjenigen Teilmengen $A \subset X$, deren Komplemente (bezüglich X) abzählbar viele Elemente besitzen. Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie für X. Sie heißt die **coabzählbare Topologie** auf X.

b) Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Die Zahl $d \in \mathbb{N}$ heißt Teiler von $n \in \mathbb{N}$, in Zeichen $d \mid n$, falls ein $s \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $d \cdot s = n$. Das Mengensystem $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sei wie folgt definiert:

$$G \in \mathcal{T} \iff \forall n \in G \ \forall d \in \mathbb{N} \text{ mit } d \mid n \, : \, d \in G,$$

d.h. eine Menge gehört genau dann zu $\mathcal{T}$, wenn sie mit jedem Element auch alle seine Teiler enthält. Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie für $\mathbb{N}$.

Aufgabe 3: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ in n Variablen mit Werten in $\mathbb{K}$. Für $I \subset \mathcal{P}$ setzt man

$$V(I) := \{x \in \mathbb{K}^n \, ; \, p(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad p \in I\}.$$

Sei $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{K}^n \, ; \text{ es gibt ein } I \subset \mathcal{P} \text{ mit } A = \complement_{\mathbb{K}^n} V(I)\}$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{K}^n$, die sogenannte **Zariski–Topologie**.

b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $n = 2$. Skizzieren Sie für $I_k = \{p_k\} \subset \mathcal{P}, 1 \leq k \leq 3$, die Nullstellenmenge $V(I_k) \subset \mathbb{R}^2$, wobei

$$p_1(x_1, x_2) := x_1 x_2, \; p_2(x_1, x_2) := x_1 - x_2, \; p_3(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 1 \quad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2).$$

c) Im Fall $n = 1$ stimmt $\mathcal{T}$ mit der cofiniten Topologie auf $\mathbb{K}$ überein. Im Fall $n > 1$ ist für unendliches $\mathbb{K}$ die cofinite Topologie auf $\mathbb{K}^n$ echt gröber als $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}_{cof} \subsetneqq \mathcal{T}$). Was gilt für endliches $\mathbb{K}$?

Aufgabe 4: Seien X eine nicht-leere Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir nennen dann $U \subset X$ offen, falls es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[) \subset U$ gilt. Sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ das System der so definierten offenen Mengen auf X.

a) Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie für X.

b) Skizzieren Sie für $X = \mathbb{R}^2$ und $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, einige (einfache) offene Mengen in dieser Topologie.

c) Beschreiben Sie $\mathcal{T}$ für endliches X und beliebiges $f : X \to \mathbb{R}$.