9. Übung zur Höheren Funktionentheorie II

Abgabe: Montag, 8.07.2002, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (Die Algebren $A(\mathbb{H})$ und $B(\mathbb{H})$) (7 Punkte):

Es sei $A(\mathbb{H})$ die Menge aller auf der oberen Halbebene holomorphen Funktionen f , die durch eine Fourier-Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} \alpha_f(m) e^{2\pi i m z}$$

dargestellt werden. $A(\mathbb{H})$ ist offensichtlich eine komplexe Algebra. $B(\mathbb{H})$ sei die Teilmenge derjenigen $f \in A(\mathbb{H})$, zu denen ein $l \geq 0$ existiert mit $\alpha_f(m) = O(m^l)$ für $m \rightarrow \infty$. Für diese f sei

$$\kappa(f) = \inf \left\{ l \geq 0; \alpha_f(m) = O(m^l) \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) $B(\mathbb{H})$ ist eine Unteralgebra von $A(\mathbb{H})$ und es gilt

$$\kappa(f+g) \leq \max\{\kappa(f), \kappa(g)\} \quad \kappa(fg) \leq \kappa(f) + \kappa(g) + 1.$$

b) Ist $f \in A(\mathbb{H})$ und $\operatorname{Im}(z)^k f(z)$ für ein $k \geq 0$ auf $\mathbb{H}$ beschränkt, so ist $f \in B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) \leq k$.

c) Ist $f \in \mathbb{M}_k$, so ist $f \in B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) \leq k - 1$. Für eine Spitzenform gilt sogar $\kappa(f) \leq \frac{k}{2}$.

d) Ist $f \in B(\mathbb{H})$, so konvergiert die Dirichletreihe

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_f(n) n^{-s}$$

auf jedem Bereich $\operatorname{Re}(s) \geq \kappa(f) + 1 + \delta$, $\delta > 0$ absolut gleichmäßig.

Aufgabe 2 (Operation auf $\mathbb{M}_k$) (5 Punkte):

Für jede auf der oberen Halbebene holomorphe Funktion f werde eine Funktion f^* erklärt durch

$$f^* : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau \mapsto \overline{f(-\bar{\tau})}.$$

Zeigen Sie

a) Ist $f \in \mathbb{M}_k$, so gilt dies auch für f^* .

b) Die Fourierkoeffizienten von $f \in \mathbb{M}_k$ sind genau dann reell, wenn $f^* = f$ gilt.

c) Die Fourierkoeffizienten von $f \in \mathbb{M}_k$ sind genau dann rein imaginär, wenn $f^* = -f$ gilt.

Aufgabe 3 (Heckegruppe)(8 Punkte):

Für positives λ ist die sogenannte HECKE-Gruppe $G(\lambda)$ zum Parameter λ definiert durch

$$G(\lambda) = \left\langle J, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeigen Sie:

a) $G(\sqrt{2}) = \Delta \cup J\Delta$, wobei

$$\Delta = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ c\sqrt{2} & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad ad - 2bc = 1 \right\}$$

in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ zu der Gruppe $\Gamma^0[2]$ konjugiert ist.

b) Die Menge $\mathcal{F} = \left\{ \tau \in \mathbb{H}; |\operatorname{Re} \tau| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}, |\tau| \geq 1 \right\}$ ist ein Fundamentalbereich von $G(\sqrt{2})$ in der oberen Halbebene.

Bestimmen Sie außerdem alle Fixpunkte von $G(\sqrt{2})$ in der oberen Halbebene, sowie die zugehörigen Fixgruppen.