

8. Übung zur Höheren Funktionentheorie II

Abgabe: Montag, 1.07.2002, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (Ordnungen)(4 Punkte):

Für $M \in \Gamma$ gilt:

- (i) $\text{ord } M = 3$ genau dann, wenn $\text{Spur } M = -1$,
- (ii) $\text{ord } M = 4$ genau dann, wenn $\text{Spur } M = 0$,
- (iii) $\text{ord } M = 6$ genau dann, wenn $\text{Spur } M = 1$.

Aufgabe 2 (Die Kongruenzgruppe $\Gamma_1[n]$) (4 Punkte):

Sei

$$\Gamma_1[n] := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, c \equiv 0 \pmod{n} \right\}.$$

- a) Man zeige, dass $\Gamma_1[n]$ ist eine Kongruenzuntergruppe, die für $n > 1$ kein Normalteiler in Γ ist. Man bestimme die Stufe von $\Gamma_1[n]$.
- b) Man bestimme $[\Gamma : \Gamma_1[n]]$, $[\Gamma_1[n] : \Gamma_0[n]]$ und $|\text{GL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})|$.
- c) Man zeige, dass $\Gamma[n]$ in $\text{GL}_2(\mathbb{Q})$ und in $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ konjugiert zu einer Untergruppe von $\Gamma_1[n^2]$ ist.

Aufgabe 3 (Bestimmung der Gruppen der Stufe 3)(6+4* Punkte):

Für eine Untergruppe Λ von Γ sei $\bar{\Lambda} := \Lambda \cup (-E)\Lambda$.

- a) Man gebe eine *Transversale* von $\bar{\Gamma}[3]$ in Γ an, also ein Repräsentantensystem von den Nebenklassen.
- b) Man zeige:
$$\Gamma/\bar{\Gamma}[3] \cong A_4.$$
- c) Man gebe einen Fundamentalbereich für $\Gamma[3]$ an und skizziere den Fundamentalbereich. Es ist nicht nötig, die Randkurven zu berechnen, wohl aber die Eckpunkte.
- d) Man bestimme explizit alle Untergruppen von Γ , die zwischen $\bar{\Gamma}[3]$ und Γ liegen. Welche Stufen habe diese Gruppen jeweils?
- e) Man bestimme alle Gruppen der Stufe 3.
- f) Man bestimme ein Repräsentantensystem der inäquivalenten Spitzen von $\Gamma[3]$.

Aufgabe 4 (Fundamentalbereiche und Kongruenzgruppen) (6 Punkte):

- a) Sei $M \in \Gamma$, Λ eine Untergruppe von Γ und $\Lambda^* = M\Lambda M^{-1}$. Ist $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von Λ , so ist $M\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von Λ^* .

- b) Sei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma[n]$, $n \in \mathbb{N}$ und $M \in \Gamma$. Dann ist auch $M\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma[n]$.
- c) Der Durchschnitt von endlich vielen Kongruenzgruppen ist eine Kongruenzgruppe.
- d) Der Durchschnitt aller Kongruenzgruppen ist $\{E\}$.
- e) Für $n > 2$ ist $\{E\}$ die einzige endliche Untergruppe von $\Gamma[n]$.