LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 17. Mai 2002

5. Übung zur Höheren Funktionentheorie II

Abgabe: Montag, 03.06.2002, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (**Darstellungen in** ζ)(4 Punkte):
Es sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$, sowie $\wp$ und ζ die Weierstraßschen Funktionen zu Ω. Zeigen Sie:

$$-\frac{\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} = \zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta(v),$$
$$\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{2(\wp(u)-\wp(v))} = \zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v).$$

Aufgabe 2 (**Äquivalenzen für kommensurabel**) (5 Punkte):
Zeigen Sie für zwei Gitter Ω und Ω' in $\mathbb{C}$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Ω und Ω' sind kommensurabel, d. h. der Durchschnitt $\Omega \cap \Omega'$ hat endlichen Index in Ω und Ω'.

(ii) der Durchschnitt $\Omega \cap \Omega'$ ist ein Gitter in $\mathbb{C}$.

(iii) Die Summe $\Omega + \Omega'$ ist ein Gitter in $\mathbb{C}$.

(iv) Es gilt $\mathcal{K}(\Omega) \cap \mathcal{K}(\Omega') \neq \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (**spezieller Funktionenraum**)(6 Punkte):
Für Abbildungen $\lambda, \mu : \Omega \to \mathbb{C}$ bezeichne $\Theta[\lambda, \mu]$ die Menge der ganzen Funktionen f mit der Eigenschaft

$$f(z+\omega) = e^{-\pi i(\lambda(\omega)z+\mu(\omega))} f(z) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega.$$

Zeigen Sie:

a) $\Theta[\lambda, \mu]$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

b) $\Theta[\lambda, \mu] \cdot \Theta[\lambda^*, \mu^*] \subset \Theta[\lambda + \lambda^*, \mu + \mu^*]$.

c) Ist $\Theta[\lambda, \mu] \neq \{0\}$, so ist $\lambda : \Omega \to \mathbb{C}$ ein Gruppenhomomorphismus und für alle ω, $\omega' \in \Omega$ gilt

$$\lambda(\omega)\omega' - \lambda(\omega')\omega \in 2\mathbb{Z}, \quad \mu(\omega+\omega') - \mu(\omega) - \mu(\omega') - \lambda(\omega')\omega \in 2\mathbb{Z}.$$

d) $\Theta[\lambda, \mu]$ enthält genau dann eine Funktion ohne Nullstellen, wenn es ein $a, b \in \mathbb{C}$ gibt mit $\lambda(\omega) = 2a\omega$ und $\mu(\omega) = a\omega^2 + b\omega$. In diesem Fall gilt

$$\Theta[\lambda, \mu] = \mathbb{C} \cdot f_{a,b}, \quad f_{a,b}(z) = e^{-\pi i(az^2+bz)}.$$

Aufgabe 4* (**spezielle Relationen**) (5 Punkte):

(i) Es sei $\Omega = \mathbb{Z}\frac{1+i\sqrt{7}}{2} + \mathbb{Z}$. Stellen Sie $\wp(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}z;\Omega)$ rational durch $\wp(z;\Omega)$ dar.

(ii) Es sei $\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit komplexer Multiplikation. Zeigen Sie:

$$\wp(\tau z;\Omega) \text{ ist genau dann ein Polynom in } \wp(z;\Omega), \text{ wenn } \tau = i \text{ oder } \tau = \frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}.$$