LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner Aachen, den 03. Mai 2002

3. Übung zur Höheren Funktionentheorie II

Abgabe: Montag, 13.05.2002, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (**Eine ζ-Funktion**)(6 Punkte):
Es sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion zu Ω. Wir wissen, dass die Reihe auf jedem Kompaktum von $\mathbb{C}$ nach Weglassen endlich vieler Glieder absolut-gleichmäßig konvergent ist. Für $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \Omega$, erklären wir

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(w) - \frac{1}{w^2} \right) dw,$$

wobei das Integral über irgendeinen Weg von 0 nach z, der Ω vermeidet, zu ertsrecken ist. Zeigen Sie:

(i) $\zeta(z)$ ist wohldefiniert.

(ii) $\zeta(z)$ ist meromorph auf $\mathbb{C}$ mit genau Polstellen in Ω. Diese sind alle von erster Ordnung mit Residuum 1.

(iii)
$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{z}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right),$$
wobei die Reihe wieder die obigen Konvergenzeigenschaften besitzt.

(iv) ζ ist ungerade und zu $\omega \in \Omega$ existiert ein η_ω mit $\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \eta_\omega$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (**Additiver Aufbau von $\mathcal{K}(\Omega)$**)(6 Punkte):
Die Bezeichnungen seien wie in Aufgabe 2. Ferner sei $0 \neq f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und $a_1, \ldots, a_l$ ein irreduzibles Repräsentantensystem der Polstellen von f modulo Ω, d. h. jede Polstelle von f ist modulo Ω zu einem der a_ν kongruent und die a_ν sind untereinander nicht kongruent. Die Hauptteile von f in den a_ν seien etwa

$$\frac{c_{\nu 1}}{(z-a_\nu)} + \cdots + \frac{c_{\nu l_\nu}}{(z-a_\nu)^{l_\nu}}$$

mit $l_\nu \leq 1$. Zeigen Sie die Existenz einer Konstanten C mit

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{l} \left(c_{\nu 1}\zeta(z-a_\nu) + \sum_{k=2}^{l_\nu} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} c_{\nu k} \wp^{(k-2)}(z-a_\nu) \right) + C.$$

Inwieweit ist diese Darstellung eindeutig?
Seien nun umgekehrt $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{C}$ paarweise inkongruent modulo Ω. Ferner seien irgendwelche Hauptteile in den a_ν vorgegeben. Bestimmen Sie ein (notwendiges und hinreichendes) Kriterium für die Existenz einer elliptischen Funktion zu Ω mit genau den Polstellen $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{C}$ modulo Ω und den vorgegebenen Hauptteilen in den a_ν.

Aufgabe 3 (**Fourierentwicklung von** $\wp(\tau)$) (4 Punkte):
Zeigen Sie, dass $\tau \mapsto \wp(z;\tau,1)$ eine meromorphe Funktion in $\mathbb{H}$ ist und bestimmen Sie die Pole und die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen. Zusätzlich berechnen Sie bitte die Fourier-Reihe von $\wp(z;\tau,1)$ bezüglich τ.

Aufgabe 4 (**Verdopplungsformel für** $\wp$)(4 Punkte):
Man drücke $\wp(2z)$ und $\wp(3z)$ rational durch $\wp(z)$ aus. Dabei gebe man das Ergebnis in normalisierter Form an.