LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 19. April 2002

1. Übung zur Höheren Funktionentheorie II

Abgabe: Montag, 29.04.2002, 12.00 Uhr

Informationen zum Übungsbetrieb: Jeweils freitags nach der Vorlesung wird ein Übungsblatt ausgegeben. Die bearbeiteten Lösungen sind Montag eine Woche später, im Kasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls, Raum 153, Hauptgebäude (HG) abzugeben. Die Übungen können in Zweiergruppen bearbeitet werden. Die korrigierten Lösungen werden dann in der Übung am Mittwoch zurückgegeben. Dort wird eine Lösung der Aufgaben vorgestellt. Die Übungsblätter zur Funktionentheorie II sind auch im WWW erhältlich (`http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/SS02/HoeFu2`).
Außerdem stehen für alle Fragen und Probleme rund um die Vorlesung Prof. Dr. A. Krieg (nach der Vorlesung sowie nach Vereinbarung, auch per E-Mail möglich, Raum 153, HG) und der Assistent A. Marschner (nach der Übung sowie nach Vereinbarung, Raum 155, HG) zur Verfügung. Sie können die Mitarbeiter auch per E-Mail erreichen: krieg@mathA.rwth-aachen.de, axel.marschner@mathA.rwth-aachen.de.
Den Schein über die Teilnahme an den Übungen erhält, wer mindestens einmal vorrechnet und mindestens 50 Prozent der Übungspunkte erreicht.

Aufgabe 1 (**Werte von Ableitungen von $\wp$**)(4 Punkte):
Sei ω_1, ω_2 eine Basis von Ω. Man zeige:

a)
$$\wp^{(ii)}(\frac{\omega_1}{2}) = 6e_1^2 - \frac{1}{2}g_2 = 2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3).$$

b)
$$\wp^{(iv)}(\frac{\omega_1}{2}) = 72e_1^3 - 6e_1g_2 = 24e_1(e_1 - e_2)(e_1 - e_3).$$

c) Man leite analoge Formeln zu a) und b) für $\frac{\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_3}{2}$ her.

Aufgabe 2 (**Eigenschaften von e_i**)(4 Punkte):
Man bestimme e_1, e_2, e_3 für den Fall, dass $g_2 = 0$ bzw. dass $g_3 = 0$ ist.

Aufgabe 3 (**Eigenschaften des Sechseckgitters**)(4 Punkte):
Sei $\Omega = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ mit $\rho = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Man zeige

a)
$$e_2 = \wp_\Omega(\frac{1}{2}) > 0, \quad e_1 = \wp_\Omega(\frac{\rho}{2}) = -\rho e_2, \quad e_3 = \wp_\Omega(-\frac{\overline{\rho}}{2}) = -\overline{\rho} e_2.$$

b) Man zeichne das Gitter mit dem Computer.

Aufgabe 4 (**Biholomorphe Abbildung**)(3 Punkte):
Man gebe explizit eine biholomorphe Abbildung zwischen dem Einheitskreis und dem Einheitsquadrat $\{z \in \mathbb{C}; 0 < x, y < 1\}$ in $\mathbb{C}$ an.

Aufgabe 5 (**Quadratgitter**)(4 Punkte):
Sei $\Omega = \mathbb{Z}i\lambda + \mathbb{Z}\lambda$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ein Quadratgitter. Man zeige, dass die Nullstellen der $\wp$-Funktion genau in $\frac{1+i}{2}\lambda + \Omega$ liegen und zeichne das Gitter für $\lambda = 3i + 4$ mit dem Computer.