Lehrstuhl A für Mathematik Aachen, den 21.06.2002
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

9. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 28.06.2002 vor der Übung)

Aufgabe 1: Beweisen Sie **Lemma II 3** der Vorlesung. Zeigen Sie zudem die Umkehrfolgerungen der Aussagen iv), vi) und vii), d.h., ist $f^\wedge$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ symmetrisch (zerfallend, radial), dann ist f symmetrisch (zerfallend, radial). $\boxed{14}$

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierte des **(Gauß-)Weierstraß-Faktors** $\Theta^W(x) := e^{-x^2/4}$, $x \in \mathbb{R}^n$, gilt:

$$[\Theta^W]^\wedge(v) = 2^n \pi^{n/2} e^{-v^2} \quad (v \in \mathbb{R}^n).$$

Hinweis: Ohne Beweis darf benutzt werden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. $\boxed{5}$

b) Der **Cesàro(-Fejér)-Faktor** (Cesàro: 1859–1906) ist für $t \in \mathbb{R}$ definiert als

$$\Theta^C(t) := \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie

$$[\Theta^C]^\wedge(s) = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ \left[\dfrac{\sin s/2}{s/2}\right]^2, & s \neq 0 \end{cases}.$$

$\boxed{3}$

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(t) := \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0\ , & t \le 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{3}$

b) Zeigen Sie

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (e^{-u}/\sqrt{u}) e^{-\beta^2/4u}\, du \quad (\beta > 0),$$

und benutzen Sie dies zur Berechnung der Fourier-Transformierten des **Cauchy-Poisson-Faktors** $\Theta^P(x) := e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dabei gilt (ohne Beweis)

(1) $e^{-\beta} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx \quad (\beta > 0)$.

(2) $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}\,du$.

(3) $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad (x > 0)$ **(Gamma-Funktion)**.

Hinweis: Lit. A II 7 (Stein-Weiss), p.6. $\boxed{12}$

Aufgabe 4: Sei $t_n(x) \in \Pi_n$ ein gerades trigonometrisches Polynom, d.h. $t_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ mit $c_k = c_{-k}$, $1 \leq k \leq n$. Sei weiter

$$\begin{aligned} \Delta^1 c_k :=& \Delta c_k := c_{k+1} - c_k, \\ \Delta^2 c_k :=& \Delta^1(\Delta^1 c_k) = c_{k+2} - 2c_{k+1} + c_k. \end{aligned}$$

Zeigen Sie (für $f \in L^1_{2\pi}$):

a)
$$\begin{aligned} t_n(x) =& -\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta c_k)D_k(x) + c_n D_n(x) \\ (f * t_n)(x) =& -\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta c_k)S_k(f;x) + c_n S_n(f;x) \end{aligned}$$
$\boxed{3}$

(mit Dirichlet-Kern D_n);

b)
$$\begin{aligned} t_n(x) =& \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(\Delta^2 c_k)F_k(x) - n(\Delta^1 c_{n-1})F_{n-1}(x) + c_n D_n(x) \\ (f * t_n)(x) =& \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(\Delta^2 c_k)\sigma_k(f;x) - n(\Delta^1 c_{n-1})\sigma_{n-1}(f;x) + c_n S_n(f;x) \end{aligned}$$
$\boxed{3}$

(mit Fejér-Kern F_n).

Definition: *Eine Folge $(c_k)_{k=0}^\infty$ von komplexen Zahlen heißt* **quasikonvex**, *wenn*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2 c_k| < \infty.$$

Aufgabe 5: Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{P}}$ quasikonvex. Weiter gelte $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} k|\Delta c_k| = 0.$$
$\boxed{3}$

$\boxed{\boxed{46}}$