Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 03.05.2002

3. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 10.05.2002 vor der Übung)

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten des **Abel-Poisson-Kerns** (Abel: 1802–1829; Poisson: 1771–1840):

$$p_r(x) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \quad (0 \le r < 1).$$

6

Hinweis: Zeigen Sie die Darstellung $p_r(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kx$.

b) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von

$$q_r(x) := \frac{2r\sin x}{1-2r\cos x + r^2}.$$

3

c) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von

$$f_1(x) := |x| \quad (-\pi \le x \le \pi),$$

und 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. 5

Aufgabe 2:

a) Man zeige die **Minkowski-Ungleichung**

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

für $x_i, y_i \in \mathbb{C}, 1 \le p < \infty$ (ohne Beweis benutze man die **Hölder-Ungleichung** 3

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$$

für $x_i, y_i \in \mathbb{C}, 1 < p < \infty$ und $1/p + 1/p' = 1$).

b) Zeigen Sie: Die Räume l^p, $1 \le p \le \infty$, und l_0^∞ sind Banach-Räume. 7

Aufgabe 3: Man zeige, dass die endliche Fourier-Transformation keine Abbildung von $L^1_{2\pi}$ auf $l^\infty_0(\mathbb{Z})$ ist, d.h., es existiert ein $c \in l^\infty_0(\mathbb{Z})$ mit $c \neq (f\,\hat{}\,(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ für jedes $f \in L^1_{2\pi}$.

Hinweis: Man betrachte c mit $c_k = (\log k)^{-1}$, $k = 2, 3, \dots$ und $c_k = 0$ sonst (vgl. Lit. C 4 (Hewitt), p.16; B III 3 (Rudin), p.104). $\boxed{8}$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ (z.B.: $C = 3\sqrt{\pi}$) mit

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right\|_{C_{2\pi}} \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Lit. C 2 (Natanson), p.88; C 6 (Timan), p.249). $\boxed{8}$

b) Mit a) schließe man: Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\varphi_n(x)| \leq 2C,$$

wobei

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &:= \Big(\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1}\Big) \\ &\quad - \Big(\frac{\cos(n+2)x}{1} + \frac{\cos(n+3)x}{2} + \dots + \frac{\cos(2n+1)x}{n}\Big).\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass für den Dirichlet-Kern D_m aus Übung 2, Aufgabe 2a), gilt

$$\|D_m\|_1 = \frac{8}{\pi} \log\, m + \mathcal{O}(1).$$

Das **Landau-Symbol** $\mathcal{O}(1)$ (Landau: 1877–1938) bedeutet hier, dass eine Konstante $M < \infty$ existiert, so dass $|\|D_m\|_1 - \frac{8}{\pi}\log m| \leq M$ für alle $m \in \mathbb{N}$. $\boxed{8}$

Hinweis: vgl. z.B. Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), p.42.

$\boxed{\boxed{50}}$