Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 05.07.2002

11. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 12.07.2002 vor der Übung)

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie für den in Übung 9, Aufgabe 2b) eingeführten Cesàro-Faktor Θ^C:

$$\left[(\Theta^C)^\wedge(\cdot)\right]^\wedge(s) = 2\pi\Theta^C(s).$$

$\boxed{3}$

b) Zeigen Sie unter Verwendung von Übung 9, Aufgabe 2b) und Teil a), dass zu gegebenen reellen Zahlen $a < b$ und $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ existiert mit

$$\begin{array}{ll} g^\wedge(t) = 1 & \text{für } a \leq t \leq b, \\ g^\wedge(t) = 0 & \text{für } t \leq a - \varepsilon \text{ oder } t \geq b + \varepsilon \\ \multicolumn{2}{l}{\text{und linear auf } [a-\varepsilon, a] \text{ und } [b, b+\varepsilon].} \end{array}$$

$\boxed{6}$

Hinweis: Lit. A II 1 (Goldberg), pp. 21-24

Aufgabe 2:

a) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g^\wedge(v) = 0$ für $|v| \geq 1$. Zeigen Sie, dass $[f * g]^\wedge(v) = 0$ ist für $|v| \geq 1$ (vgl. Lemma I 35 d)). $\boxed{1}$

b) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $f(x) = 0$ für $|x| \geq a$ und $g(x) = 0$ für $|x| \geq b$. Zeigen Sie, dass dann $(f * g)(x) = 0$ ist für $|x| \geq a + b$. $\boxed{2}$

c) Zeigen Sie, dass Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ existieren mit $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$(f * g)^\wedge(v) = 0 \quad (v \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $f(x) := \left[\Theta^C\right]^\wedge(x) + \left[\Theta^C\right]^\wedge(x+\pi)$ und $g(x) = e^{-2ix}f(x)$. $\boxed{5}$

Aufgabe 3: Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine ungerade (d.h. $c_k = -c_{-k}$) Folge von reellen Zahlen mit $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq 0$ und $\lim_{|k|\to\infty} c_k = 0$. Zeigen Sie: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ ist Fourier-Reihe einer Funktion $g \in L^1_{2\pi}$ genau dann, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-\Delta c_k)\log k < \infty$.

Hinweis: Benutzen Sie Übung 10, Aufgabe 3 (vgl. Lit. A II 4 (Edwards I), pp. 115-116). $\boxed{10}$

Aufgabe 4: Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\log k}$ ist die Fourier-Reihe einer Funktion aus $L^1_{2\pi}$. $\boxed{4}$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\log k}$ ist nicht die Fourier-Reihe einer Funktion aus $L^1_{2\pi}$. $\boxed{2}$

Aufgabe 5: Sei $(c_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ eine gerade, beschränkte Folge, so dass $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ **konvex** ist, d.h., $\Delta^2 c_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{P}$.

a) Zeigen Sie:

(i) $\Delta c_k \leq 0$ für alle $k \in \mathbb{P}$,

(ii) $\lim_{k\to\infty} k\Delta c_k = 0$,

(iii) $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ ist quasikonvex. $\boxed{6}$

b) Sei $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ zusätzlich eine Nullfolge. Beweisen Sie, dass dann eine gerade, positive Funktion $g \in L^1_{2\pi}$ existiert mit $g^\wedge(k) = c_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{2}$

Definition: *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* **konvex***, falls*

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad (x, y \in I,\ \lambda \in [0,1]\,).$$

Aufgabe 6: Sei $f \in L^1_{2\pi}$ konvex auf $(0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Cosinus-Koeffizienten $a_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(u) \cos ku\, du$ gilt: $a_k \geq 0,\ k \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Lit. A I 4 (Hardy-Rogosinski), p.25 $\boxed{7}$

$\boxed{\boxed{48}}$