Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 28.06.2002

10. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 05.07.2002 vor der Übung)

Definition: *Eine Familie* $(c_k(\rho))_{k=0}^{\infty}$, $\rho \in \mathbb{A}$, *quasikonvexer Folgen (vgl. Definition in Übung 9) heißt* **gleichgradig quasikonvex**, *falls eine von* ρ *unabhängige Konstante* $M < \infty$ *existiert, so dass*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2 c_k(\rho)| \le M \qquad (\rho \in \mathbb{A}).$$

Aufgabe 1:

a) Sei $(c_k(\rho))_{k\in\mathbb{Z}}$, $\rho \in \mathbb{A}$, eine Familie von geraden Folgen, so dass $(c_k(\rho))_{k=0}^{\infty}$ gleichgradig quasikonvex und gleichgradig beschränkt ist. Gilt zudem $\lim_{k\to\infty} c_k(\rho) = 0$ für jedes $\rho \in \mathbb{A}$, dann existieren eine Konstante $M < \infty$ und zu jedem $\rho \in \mathbb{A}$ eine gerade Funktion $g_\rho \in L^1_{2\pi}$ derart, dass

$$\begin{aligned} g_\rho^\wedge(k) &= c_k(\rho) \qquad && (k \in \mathbb{Z},\, \rho \in \mathbb{A}), \\ \|g_\rho\|_{L^1_{2\pi}} &\le M && (\rho \in \mathbb{A}). \end{aligned}$$

Hinweis: Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), pp.249–250 $\boxed{8}$

b) Sei $\{\chi_t\}_{t>0}$ der (periodische) Gauß-Weierstraß-Kern aus Übung 8, Aufgabe 2 und $W_t f := f * \chi_t$, $f \in X_{2\pi}$ das zugehörige Faltungsintegral. Zeigen Sie

$$\lim_{t\to 0+} \|W_t f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \quad (f \in X_{2\pi}).$$

Hinweis: Verifizieren Sie die gleichgradige Quasikonvexität von $\{\chi_t^\wedge\}_{t>0}$ mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Benutzen Sie zudem den Satz von Banach-Steinhaus (vgl. Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), p.19). $\boxed{4}$

Aufgabe 2: Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass eine gerade Funktion $\varphi_\alpha \in L^1_{2\pi}$ existiert mit $\varphi_\alpha^\wedge(k) = |k|^{-\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. $\boxed{5}$

Aufgabe 3: Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k} < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty}(-\Delta c_k)\log k < \infty.$$

Hinweis: Benutzen Sie Abel'sche partielle Summation und (mit Herleitung) die Abschätzung

$$\log m \le \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \le 2 \log m \qquad (m \in \mathbb{N}, m \ge 3).$$

$\boxed{7}$

Aufgabe 4:

a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie für das Analogon zur Partialsumme

$$S_R(f;x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} f^\wedge(t) e^{ixt}\, dt$$

die Darstellung

$$S_R(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{\sin Rt}{t}\, dt.$$

$\boxed{3}$

b) Seien $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$, und es gebe Zahlen $c \in \mathbb{C}$ und $\delta > 0$, so dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\delta [f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2c] \frac{\sin Rt}{t} dt = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $\lim_{R\to\infty} S_R(f;x_0) = c$ gilt (vgl. Satz I 43). $\boxed{7}$

c) Seien $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f \in BV[x_0-\delta, x_0+\delta]$ für ein $\delta > 0$. Man beweise, dass (vgl. Folgerung I 51)

$$\lim_{R\to\infty} S_R(f;x_0) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}.$$

$\boxed{10}$

Hinweis: Lit. A II 19 (Chandrasekharan), pp.25–30

$\boxed{44}$