Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. E. Görlich

Aachen, den 17.07.2002

Formelsammlung spezieller Funktionen

1 Logarithmus, Exponential- und Potenzfunktionen

1.1 Natürlicher Logarithmus

$$\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

Der **Logarithmus** ist auf $(0,\infty)$ definiert durch

$$\log x = \lim_{n\to\infty} 2^n \Big(1 - \frac{1}{\sqrt[2^n]{x}}\Big) = \lim_{n\to\infty} 2^n \big(\sqrt[2^n]{x} - 1\big).$$

Der Logarithmus ist stetig, streng monoton wachsend und besitzt eine Nullstelle in $x = 1$.

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches

(1) $$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \log x = \infty.$$

Funktionswerte

(2) $$\log 1 = 0, \qquad \log e = 1;$$

wobei $e = 2.718281828459\ldots$ die Eulersche Zahl ist.

Funktionalgleichung

(3) $$\log(xy) = \log x + \log y \qquad x, y > 0.$$

Abschätzungen

(4) $$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1 \qquad x > 0,\ x \neq 1;$$

(5) $$2\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\Big) < \log x < 2(\sqrt{x} - 1) \qquad x > 0,\ x \neq 1.$$

Für $x = 1$ gilt natürlich Gleichheit.

Weitere Eigenschaften

(6) $$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y, \qquad \log x^a = a \log x \qquad x, y > 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

Ableitung und Integral

(7) $$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}, \qquad \int \log x\, dx = x \log x - x \qquad x > 0.$$

Reihendarstellungen und Grenzwerte

(8) $$\log x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2k+1}}{(2k+1)(x+1)^{2k+1}} \qquad x > 0;$$

(9) $$\log x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k x^k} \qquad x > \frac{1}{2};$$

(10) $$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \qquad -1 < x \leq 1;$$

(11) $$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad -1 \leq x < 1;$$

(12) $$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\Big)=C \qquad C=0,577215664901532\ldots.$$

Die Konstante C heißt Euler–Mascheroni Konstante.

1.2 Exponential- und Potenzfunktionen

$$a^x\colon \mathbb{R}\to(0,\infty)\,, \qquad x^p\colon (0,\infty)\to\mathbb{R} \qquad a>0\,, p\in\mathbb{R}$$

Für $a>0$ und $b\in\mathbb{R}$ ist a^b mit $a^0:=1$ wohldefiniert. Die **Exponentialfunktion** ist auf $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$a^x\colon \mathbb{R}\to(0,\infty)\,, x\mapsto a^x \qquad a>0\,.$$

Die **Potenzfunktion** ist auf $(0,\infty)$ gegeben durch

$$x^p\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}\,, x\mapsto x^p \qquad p\in\mathbb{R}\,.$$

Für rationale Exponenten $p=r/s$, mit $r\in\mathbb{Z}$ und ungeradem $s\in\mathbb{N}$, kann der Definitionsbereich der Potenzfunktion erweitert werden durch

$$x^p:=(-1)^{|r+s+1|}|x|^p \qquad x\in\mathbb{R}\,,\ \text{falls } p\geq 0\ \text{ und } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,\ \text{falls } p<0\,.$$

Die Exponentialfunktion ist stetig, streng monoton wachsend und besitzt keine Nullstellen in $\mathbb{R}$.

Die Potenzfunktion ist stetig auf $(0,\infty)$, für $p>0$ streng monoton wachsend, für $p<0$ streng monoton fallend und für $p=0$ konstant auf $(0,\infty)$. Ist die Potenzfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, so besitzt sie für $p>0$ genau eine Nullstelle in $x=0$.

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches

(13) $$\lim_{x\to-\infty}a^x=0\,, \qquad \lim_{x\to\infty}a^x=\infty\,;$$

(14) $$\lim_{x\to 0^+}x^p=\begin{cases}0\,, & p>0\\ \infty\,, & p<0\end{cases}\,, \qquad \lim_{x\to\infty}x^p=\begin{cases}\infty\,, & p>0\\ 0\,, & p<0\end{cases}\,.$$

Funktionswerte

(15) $$a^0=1\,, \qquad a^1=a\,, \qquad 1^p=1\,.$$

Funktionalgleichungen

(16) $$a^{x+y}=a^xa^y\,, \qquad a^xb^x=(ab)^x\,, \qquad (a^x)^y=a^{xy} \qquad a,b>0\,,\ x,y\in\mathbb{R}\,.$$

Abschätzungen

(17) $$1+x\leq e^x \qquad x\in\mathbb{R}\,;$$

(18) $$e^x\leq\frac{1}{1-x} \qquad x<1\,.$$

Weitere Eigenschaften

(19) $$a^x=e^{x\log a} \qquad \log a^x=x\log a \qquad a>0\,,\ x\in\mathbb{R}\,;$$

(20) $$e^{\log x}=x \quad \text{für } x>0\,, \qquad \log e^x=x \quad \text{für } x\in\mathbb{R}\,.$$

Die e–Funktion ist somit die Umkehrfunktion des Logarithmus. Die Umkehrfunktion von a^x wird mit $\log_a x$ bezeichnet und heißt Logarithmus zur Basis a. Es gilt

(21) $$\log_a x=\frac{\log x}{\log a} \qquad x,a>0\,.$$

Ableitung und Integral

(22) $$\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a\,, \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad a > 0\,,\; x \in \mathbb{R}\,;$$

(23) $$\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1} \qquad p \in \mathbb{R}\,,\; x > 0\,;$$

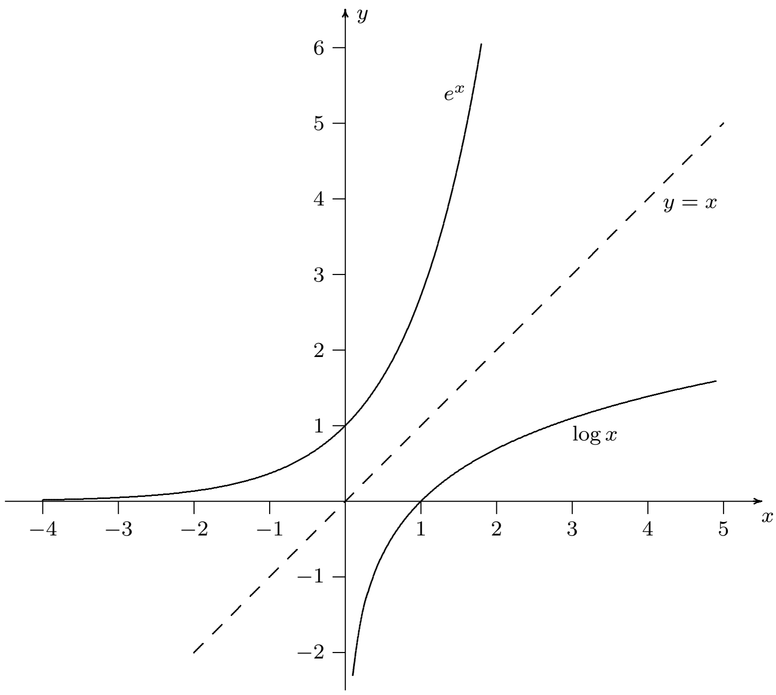
(24) $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} \qquad a > 0\,,\; a \neq 1\,;$$

(25) $$\int x^p\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{p+1}}{p+1}\,, & p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \log|x|\,, & p = -1\,. \end{cases}$$

Reihendarstellungen und Grenzwerte

(26) $$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad x \in \mathbb{R}\,;$$

(27) $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$



2 Arcusfunktionen

2.1 Arcustangens

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Der **Arcustangens** ist auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\arctan x := \lim_{n\to\infty} 2^n x_n\,, \text{ wobei } x_0 := x\,,\; x_{n+1} := \frac{x_n}{1 + \sqrt{1 + x_n^2}} \qquad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Der Arcustangens ist stetig, streng monoton wachsend und besitzt eine Nullstelle in $x = 0$.

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches

(28) $$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Funktionswerte

$$\arctan 0 = 0\,, \qquad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,. \tag{29}$$

Symmetrie

$$\arctan(-x) = -\arctan x\,. \tag{30}$$

Abschätzungen

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)} < \arctan x < \frac{2x}{1+\sqrt{1+x^2}} \qquad x > 0\,. \tag{31}$$

Für $x < 0$ kehrt sich die Ungleichungskette um, und für $x = 0$ gilt natürlich Gleichheit.

Additionstheoreme

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} \qquad xy < 1\,; \tag{32}$$

$$\arctan x + \arctan y = \pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy} \qquad x > 0\,,\ xy > 1\,; \tag{33}$$

$$\arctan x + \arctan y = -\pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy} \qquad x < 0\,,\ xy > 1\,. \tag{34}$$

Weitere Eigenschaften

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \qquad x \neq 0\,. \tag{35}$$

Ableitung und Integral

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad \int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)\,. \tag{36}$$

Reihendarstellungen und Grenzwerte

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)} \qquad |x| < 1\,; \tag{37}$$

$$\arctan x = \pm\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)x^{2k+1}} \qquad |x| > 1\,. \tag{38}$$

Dabei trägt das erste Glied das Vorzeichen „+“ für $x > 1$ und „$-$“ für $x < -1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1\,. \tag{39}$$

2.2 Arcuscotangens

$$\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

Der **Arcuscotangens** ist auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\operatorname{arccot} x := \frac{\pi}{2} - \arctan x\,.$$

Der Arcuscotangens ist stetig, streng monoton fallend und besitzt keine Nullstellen.

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot} x = 0\,. \tag{40}$$

Funktionswerte

$$\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \operatorname{arccot}(-1) = \frac{3}{4}\pi\,. \tag{41}$$

Symmetrie

(42) $$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x\,.$$

Abschätzungen

(43) $$\frac{\pi}{2} - \frac{2x}{1+\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arccot} x < \frac{\pi}{2} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}\bigl(1+\sqrt{1+x^2}\bigr)} \qquad x > 0\,.$$

Für $x < 0$ kehrt sich die Ungleichungskette um, und für $x = 0$ gilt Gleichheit.

Additionstheoreme

(44) $$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y = \operatorname{arccot} \frac{xy-1}{x+y} \qquad x + y > 0\,.$$

Weitere Eigenschaften

(45) $$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ableitung und Integral

(46) $$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}\,, \qquad \int \operatorname{arccot} x\, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \log(1+x^2)\,.$$

Reihendarstellungen und Grenzwerte

(47) $$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)} \qquad |x| < 1\,.$$

2.3 Arcussinus und Arcuscosinus

$$\arcsin\colon [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]\,, \qquad \arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

Der **Arcussinus** ist für $|x| \le 1$ definiert durch

$$\arcsin x := \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ |x| < 1\,; \qquad \arcsin(\pm 1) := \pm\frac{\pi}{2}\,.$$

Der **Arcuscosinus** ist für $|x| \le 1$ definiert durch

$$\arccos x := \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ |x| < 1\,; \qquad \arccos 1 := 0\,, \qquad \arccos(-1) := \pi\,.$$

Der Arcussinus ist stetig, streng monoton wachsend und besitzt eine Nullstelle in $x = 0$. Der Arcuscosinus ist stetig, streng monoton fallend und besitzt eine Nullstelle in $x = 1$.

Funktionswerte

(48) $$\arcsin 0 = 0\,, \qquad \arcsin(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}\,;$$

(49) $$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \arccos(-1) = \pi\,, \qquad \arccos 1 = 0\,.$$

Symmetrie

(50) $$\arcsin(-x) = -\arcsin x\,, \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x\,.$$

Additionstheoreme

(51) $$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$xy \le 0 \ \text{ oder } x^2 + y^2 \le 1\,;$$

(52) $$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$x > 0\,,\ y > 0\,,\ x^2 + y^2 > 1\,;$$

(53) $$\arcsin x + \arcsin y = -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$x < 0\,,\ y < 0\,,\ x^2 + y^2 > 1\,;$$

(54) $$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad x + y \ge 0\,;$$

(55) $$\arccos x + \arccos y = 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad x + y < 0\,.$$

Weitere Eigenschaften

(56) $$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad x \in [-1, 1]\,.$$

Ableitung und Integral

(57) $$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

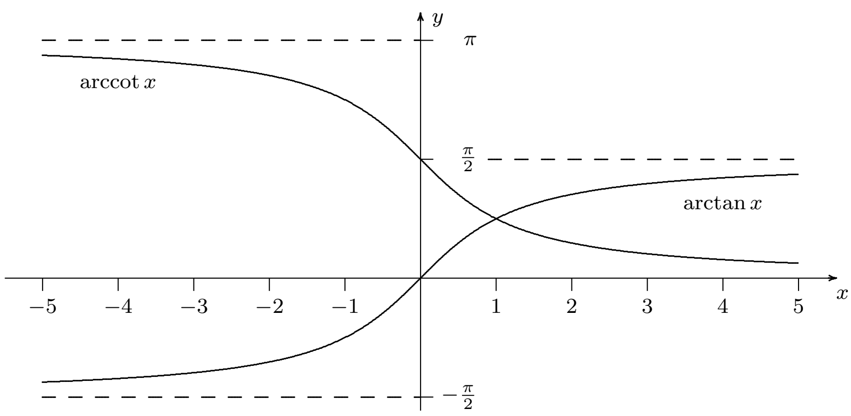
(58) $$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,, \qquad \int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}\,.$$

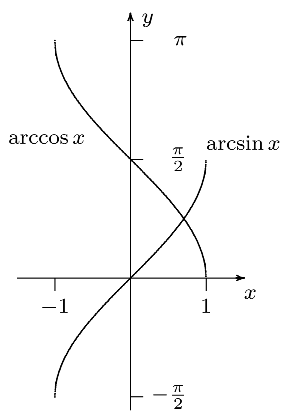
Reihendarstellungen und Grenzwerte

(59) $$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!x^{2k+1}}{(2k)!!(2k+1)} \qquad |x| < 1\,;$$

(60) $$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!x^{2k+1}}{(2k)!!(2k+1)} \qquad |x| < 1\,.$$

Dabei sind für $n \in \mathbb{N}$ die Doppelfakultäten gegeben durch $(2n+1)!! := (2n+1)(2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$, $(2n)!! := (2n)(2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2$, $0!! := 1$ und $(-1)!! := 1$.





3 Trigonometrische Funktionen

3.1 Tangens und Cotangens

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{(1/2+k)\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \qquad \cot\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

Der **Tangens** ist auf $(-\pi/2, \pi/2)$ definiert als die Umkehrfunktion des Arcustangens

$$\tan x := \arctan^{-1} x \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2)\,,$$

und wird auf $\mathbb{R} \setminus \{(1/2+k)\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$ fortgesetzt durch

$$\tan x := \tan(x - k\pi) \qquad x \in \big((-1/2+k)\pi, (1/2+k)\pi\big)\,.$$

Ebenso ist der **Cotangens** auf $(0, \pi)$ definiert als die Umkehrfunktion des Arcuscotangens

$$\cot x := \operatorname{arccot}^{-1} x \qquad x \in (0, \pi)\,,$$

und wird auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$ fortgesetzt durch

$$\cot x := \cot(x - k\pi) \qquad x \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big)\,.$$

Der Tangens ist stetig, streng monoton wachsend auf seinem Definitionsbereich und besitzt Nullstellen in $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Der Cotangens ist stetig, streng monoton fallend auf seinem Definitionsbereich und besitzt Nullstellen in $x = (1/2 + k)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches
Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

(61) $$\lim_{x \to (\frac{1}{2}+k)\pi^-} \tan x = \infty\,, \qquad \lim_{x \to (\frac{1}{2}+k)\pi^+} \tan x = -\infty\,;$$

(62) $$\lim_{x \to k\pi^-} \cot x = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to k\pi^+} \cot x = \infty\,.$$

Funktionswerte

(63) $$\tan 0 = \tan \pi = 0\,, \qquad \tan(\pi/6) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,, \qquad \tan(\pi/4) = 1\,, \qquad \tan(\pi/3) = \sqrt{3}\,;$$

(64) $$\cot(\pi/6) = \sqrt{3}\,, \qquad \cot(\pi/4) = 1\,, \qquad \cot(\pi/3) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,, \qquad \cot(\pi/2) = 0\,.$$

Weitere Funktionswerte erhält man unter Ausnutzung der Symmetrie.

Symmetrie
(65)
$$\tan(-x) = -\tan x\,, \qquad \tan x = \tan(x+\pi)\,, \qquad \cot(-x) = -\cot x\,, \qquad \cot x = \cot(x+\pi)\,.$$

Additionstheoreme

(66) $$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\,;$$

(67) $$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}\,;$$

(68) $$\tan x \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = -\frac{\tan x - \tan y}{\cot x - \cot y}\,;$$

(69) $$\cot x \cot y = \frac{\cot x + \cot y}{\tan x + \tan y} = -\frac{\cot x - \cot y}{\tan x - \tan y}\,;$$

(70) $$\tan x \cot y = \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y} = -\frac{\tan x - \cot y}{\cot x - \tan y}\,.$$

Die Ausdrücke gelten für diejenigen $x, y \in \mathbb{R}$, für die die Brüche wohldefiniert sind.

Ableitung und Integral

(71) $$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}\,;$$

(72) $$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|\,, \qquad \int \cot x\,dx = \log|\sin x|\,.$$

3.2 Sinus und Cosinus

$$\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]\,, \qquad \cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$$

Der **Sinus** ist auf $(-\pi, \pi]$ definiert als

$$\sin x := \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}\,,\ x \in (-\pi,\pi) \qquad \sin\pi := 0\,.$$

Dann wird der Sinus 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt durch

$$\sin x := \sin(x - 2k\pi) \qquad x \in \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big]\,.$$

Der **Cosinus** ist auf $(-\pi, \pi]$ definiert als

$$\cos x := \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}\,,\ x \in (-\pi,\pi) \qquad \cos\pi := -1\,.$$

Dann wird der Cosinus 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt durch

$$\cos x := \cos(x - 2k\pi) \qquad x \in \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big] \,.$$

Der Sinus ist stetig und besitzt Nullstellen in $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Der Cosinus ist stetig und besitzt Nullstellen in $x = (1/2 + k)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funktionswerte

(73) $\sin 0 = 0\,, \qquad \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}\,, \qquad \sin(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \qquad \sin(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,, \qquad \sin(\pi/2) = 1\,;$

(74) $\cos 0 = 1\,, \qquad \cos(\pi/6) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,, \qquad \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \qquad \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}\,, \qquad \cos(\pi/2) = 0\,.$

Weitere Funktionswerte erhält man unter Ausnutzung der Symmetrie.

Symmetrie

(75)

$$\sin(-x) = -\sin x\,, \qquad \sin x = -\sin(x+\pi)\,, \qquad \cos(-x) = \cos x\,, \qquad \cos x = -\cos(x+\pi)\,.$$

Abschätzungen

(76) $$\sin x \le x\,, \qquad \sin x \ge x - \frac{x^3}{6} \qquad x \ge 0\,;$$

(77) $$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,;$$

(78) $$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1\,, \qquad \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad x \in \mathbb{R}\,;$$

(79) $$\Big|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\Big| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \qquad n \in \mathbb{N}\,,\ x \ne 2j\pi\,,\ j \in \mathbb{Z}\,.$$

Genauere Abschätzungen von $\sin x$ und $\cos x$ erhält man durch Taylor-Entwicklungen.

Additionstheoreme

Es gelten für $x, y \in \mathbb{R}$

(80) $$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,;$$

(81) $$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,;$$

(82) $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,;$$

(83) $$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,;$$

(84) $$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)\,;$$

(85) $$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big)\,;$$

(86) $$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big)\,.$$

Weitere Eigenschaften

(87) $$\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) \qquad x \in \mathbb{R}\,;$$

(88) $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ableitung und Integral

(89) $$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x\,, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\,;$$

(90) $$\int \sin x\,dx = -\cos x\,, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x\,.$$

Reihendarstellungen und Grenzwerte

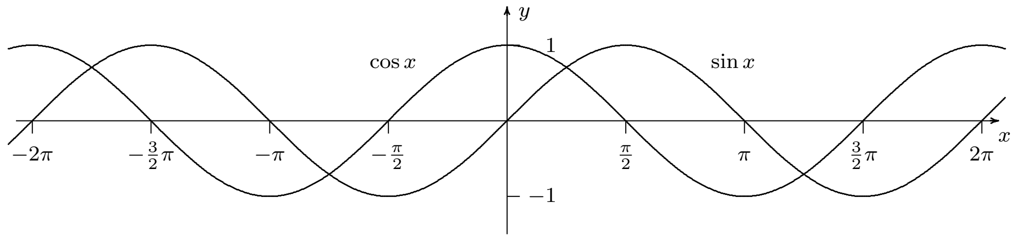
(91) $$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}\,;$$

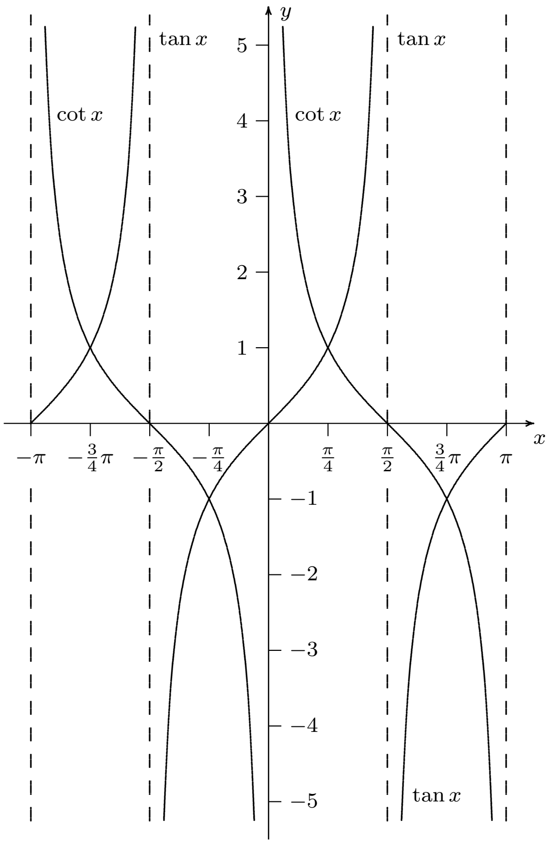
(92) $$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad x \in \mathbb{R}\,;$$

(93) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Umrechnungstabelle der trigonometrischen Funktionen

	$\sin^2$	$\cos^2$	$\tan^2$	$\cot^2$
$\sin^2 x =$	$\sin^2 x$	$1-\cos^2 x$	$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$\frac{1}{1+\cot^2 x}$
$\cos^2 x =$	$1-\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{1+\tan^2 x}$	$\frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$
$\tan^2 x =$	$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$	$\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$	$\tan^2 x$	$\frac{1}{\cot^2 x}$
$\cot^2 x =$	$\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$	$\frac{1}{\tan^2 x}$	$\cot^2 x$





4 Hyperbolische Funktionen

4.1 Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad \cosh\colon \mathbb{R} \to [1,\infty)$$

Der **Sinus hyperbolicus** ist auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

Der **Cosinus hyperbolicus** ist auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

Der Sinus hyperbolicus ist stetig, monoton wachsend und besitzt eine Nullstelle in $x = 0$. Der Cosinus hyperbolicus ist stetig und besitzt keine Nullstellen.

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches

(94) $$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty\,;$$

(95) $$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \cosh x = \infty\,.$$

Funktionswerte

(96) $$\sinh 0 = 0\,, \qquad \cosh 0 = 1\,.$$

Symmetrie

(97) $$\sinh(-x) = -\sinh x\,, \qquad \cosh(-x) = \cosh x\,.$$

Abschätzungen

(98) $$\sinh x < \frac{1}{2}e^x < \cosh x \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Additionstheoreme
Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$

(99) $$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\,;$$

(100) $$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}\,;$$

(101) $$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,;$$

(102) $$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}\,.$$

Weitere Eigenschaften

(103) $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad x \in \mathbb{R}\,;$$

(104) $$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx) \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Ableitung und Integral

(105) $$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x\,, \qquad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x\,;$$

(106) $$\int \sinh x\, dx = \cosh x\,, \qquad \int \cosh x\, dx = \sinh x\,.$$

Reihendarstellungen und Grenzwerte

(107) $$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}\,;$$

(108) $$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(109) $$\lim_{x \to -\infty} e^x \sinh x = -\frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\sinh x}{e^x} = \frac{1}{2}\,;$$

(110) $$\lim_{x \to -\infty} e^x \cosh x = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\cosh x}{e^x} = \frac{1}{2}\,.$$

4.2 Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus

$$\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1,1)\,, \qquad \coth\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1,1]$$

Der **Tangens hyperbolicus** ist auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

Entsprechend ist der **Cotangens hyperbolicus** auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert durch

$$\coth x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,.$$

Der Tangens hyperbolicus ist stetig, streng monoton wachsend auf seinem Definitionsbereich und besitzt eine Nullstelle in $x = 0$. Der Cotangens hyperbolicus ist stetig, streng monoton fallend auf seinem Definitionsbereich und besitzt keine Nullstellen.

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches

(111) $$\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1\,;$$

(112) $$\lim_{x\to\infty} \coth x = 1\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \coth x = -1\,;$$

(113) $$\lim_{x\to 0^+} \coth x = \infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} \coth x = -\infty\,.$$

Funktionswerte

(114) $$\tanh 0 = 0\,.$$

Symmetrie

(115) $$\tanh(-x) = -\tanh x\,, \qquad \coth(-x) = -\coth x\,.$$

Additionstheoreme

(116) $$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \qquad x, y \in \mathbb{R}\,;$$

(117) $$\coth(x+y) = \frac{1 + \coth x \coth y}{\coth x + \coth y} \qquad x, y, x+y \neq 0\,;$$

(118) $$\tanh x \pm \tanh y = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y} \qquad x, y \neq 0\,;$$

(119) $$\coth x \pm \coth y = \frac{\sinh(y \pm x)}{\sinh x \sinh y} \qquad x, y \neq 0\,.$$

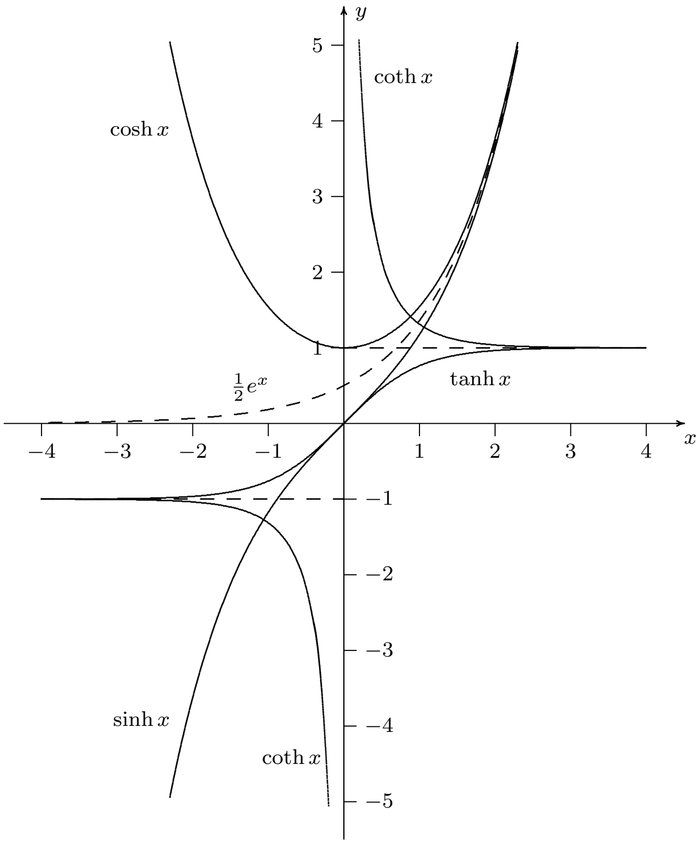
Ableitung und Integral

(120) $$\frac{d}{dx} \tanh x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}\,, \qquad \frac{d}{dx} \coth x = 1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x}\,;$$

(121) $$\int \tanh x\, dx = \log(\cosh x)\,, \qquad \int \coth x\, dx = \log|\sinh x|\,.$$

Umrechnungstabelle der hyperbolischen Funktionen

	$\sinh^2$	$\cosh^2$	$\tanh^2$	$\coth^2$
$\sinh^2 x =$	$\sinh^2 x$	$\cosh^2 x - 1$	$\frac{\tanh^2 x}{1 + \tanh^2 x}$	$\frac{1}{\coth^2 x - 1}$
$\cosh^2 x =$	$1 + \sinh^2 x$	$\cosh^2 x$	$\frac{1}{1 - \tanh^2 x}$	$\frac{\coth^2 x}{\coth^2 x - 1}$
$\tanh^2 x =$	$\frac{\sinh^2 x}{1 + \sinh^2 x}$	$\frac{\cosh^2 x - 1}{\cosh^2 x}$	$\tanh^2 x$	$\frac{1}{\coth^2 x}$
$\coth^2 x =$	$\frac{1 + \sinh^2 x}{\sinh^2 x}$	$\frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x - 1}$	$\frac{1}{\tanh^2 x}$	$\coth^2 x$



5 Areafunktionen

5.1 Areasinushyperbolicus und Areacosinushyperbolicus

$$\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$$

Der **Areasinushyperbolicus** ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert als die Umkehrfunktion des Sinus hyperbolicus:

$$\operatorname{arsinh} x := \sinh^{-1} x \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Der **Areacosinushyperbolicus** ist für $x \in [1,\infty)$ definiert als die Umkehrfunktion des Cosinus hyperbolicus:

$$\operatorname{arcosh} x := \left(\cosh\big|_{[0,\infty)}\right)^{-1} x \qquad x \in [1,\infty)\,.$$

Der Areasinushyperbolicus ist stetig, streng monoton wachsend und besitzt eine Nullstelle in $x = 0$. Der Areacosinushyperbolicus ist stetig, streng monoton wachsend und besitzt eine Nullstelle in $x = 1$.

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches

(122) $$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arsinh} x = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arsinh} x = \infty\,;$$

(123) $$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcosh} x = \infty\,.$$

Funktionswerte

(124) $$\operatorname{arsinh} 0 = 0\,, \qquad \operatorname{arcosh} 1 = 0\,.$$

Symmetrie

(125) $$\operatorname{arsinh}(-x) = -\operatorname{arsinh} x\,.$$

Abschätzungen

(126) $$\log(2x) < \operatorname{arsinh} x\,, \qquad x > 0\,;$$

(127) $$\operatorname{arcosh} x < \log(2x)\,, \qquad x \geq 1\,.$$

Additionstheoreme

(128) $$\operatorname{arsinh} x + \operatorname{arsinh} y = \operatorname{arsinh}\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right) \qquad x, y \in \mathbb{R}\,;$$

(129) $$\operatorname{arcosh} x + \operatorname{arcosh} y = \operatorname{arcosh}\left(xy + \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\right) \qquad x, y \geq 1\,.$$

Weitere Eigenschaften

(130) $$\operatorname{arsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad x \geq 0\,;$$

(131) $$\operatorname{arcosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 1\,.$$

Ableitung und Integral

(132) $$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,;$$

(133) $$\int \operatorname{arsinh} x \, dx = x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}\,,$$

(134) $$\int \operatorname{arcosh} x \, dx = x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}\,.$$

Reihendarstellungen und Grenzwerte

(135) $$\operatorname{arsinh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!! x^{2k+1}}{(2k)!!(2k+1)} \qquad |x| < 1\,;$$

(136) $$\operatorname{arcosh} x = \log(2x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!! 2k x^{2k}} \qquad x > 1\,.$$

5.2 Areatangenshyperbolicus und Areacotangenshyperbolicus

$$\operatorname{artanh}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{arcoth}\colon \mathbb{R} \setminus [-1,1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Der **Areatangenshyperbolicus** ist für $x \in (-1,1)$ definiert als die Umkehrfunktion des Tangens hyperbolicus:

$$\operatorname{artanh} x := \tanh^{-1} x \qquad x \in (-1,1)\,.$$

Der **Areacotangenshyperbolicus** ist für $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ definiert als die Umkehrfunktion des Cotangens hyperbolicus:

$$\operatorname{arcoth} x := \coth^{-1} x \qquad x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]\,.$$

Der Areatangenshyperbolicus ist stetig, streng monoton wachsend und besitzt eine Nullstelle in $x = 0$. Der Areacotangenshyperbolicus ist stetig, streng monoton fallend und besitzt keine Nullstellen.

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches

(137) $$\lim_{x \to 1^-} \operatorname{artanh} x = \infty\,, \qquad \lim_{x \to -1^+} \operatorname{artanh} x = -\infty\,;$$

(138) $$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arcoth} x = 0\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcoth} x = 0\,;$$

(139) $$\lim_{x \to 1^+} \operatorname{arcoth} x = \infty\,, \qquad \lim_{x \to -1^-} \operatorname{arcoth} x = -\infty\,.$$

Funktionswerte

(140) $$\operatorname{artanh} 0 = 0\,.$$

Symmetrie

(141) $$\operatorname{artanh}(-x) = -\operatorname{artanh} x\,, \qquad \operatorname{arcoth}(-x) = -\operatorname{arcoth} x\,.$$

Additionstheoreme

(142) $$\operatorname{artanh} x + \operatorname{artanh} y = \operatorname{artanh}\frac{x+y}{1+xy} \qquad x, y \in (-1, 1)\,;$$

(143) $$\operatorname{arcoth} x + \operatorname{arcoth} y = \operatorname{arcoth}\frac{1+xy}{x+y} \qquad x, y \in \mathbb{R}\setminus[-1, 1]\,.$$

Weitere Eigenschaften

(144) $$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \qquad x, y \in (-1, 1)\,;$$

(145) $$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \qquad x, y \in \mathbb{R}\setminus[-1, 1]\,.$$

Ableitung und Integral

(146) $$\frac{d}{dx}\operatorname{artanh} x = \frac{1}{1-x^2}\,, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{1-x^2}\,;$$

(147) $$\int \operatorname{artanh} x\,dx = x\operatorname{artanh} x + \frac{1}{2}\log(1-x^2)\,,$$

(148) $$\int \operatorname{arcoth} x\,dx = x\operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2}\log(x^2-1)\,.$$

Reihendarstellungen und Grenzwerte

(149) $$\operatorname{artanh} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad |x| < 1\,;$$

(150) $$\operatorname{arcoth} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}} \qquad |x| > 1\,.$$