Ungleichungen*

Bernd Reinhold

Proseminar ”Proofs from the Book”
Aachen, im Juni 2001

Bewiesen werden im Folgenden **die** zwei Ungleichungen schlechthin:

- die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
- die Ungleichung zwischen harmonischem, geometrischem und arithmetischem Mittel[1] Dabei zeichnen wir einen Beweis von CAUCHY nach und einen von ALZER (letzterer hat diesen Beweis der GAM-Ungleichung[2] 1996 veröffentlicht)
- Dann folgt noch ein Beweis des **Satzes von** LAGUERRE unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und last but not least
- ein **Satz von** ERDŐS **und** GRÜNWALD; an dieser Stelle spielen sowohl die GAM- als auch die HGM-Ungleichung[3] eine wichtige Rolle)

CAUCHY-SCHWARZSCHE **Ungleichung.** *Sei V ein reeller n-dimensionaler Vektorraum mit der Norm $\|a\|^2 := \langle a, a\rangle$, wobei $a \epsilon V$. Und mit $a, b \epsilon V$ sei $\langle a, b\rangle$ das Skalarprodukt von a und b. Dann gilt*

$$\langle a, b\rangle^2 \leq \|a\|^2\|b\|^2 \tag{1}$$

für alle Vektoren $a, b \epsilon V$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn a und b linear abhängig sind.

”Der folgende Beweis ist wahrscheinlich der kürzeste”, vermuten die Autoren von ”Proofs from the Book”. Darüber kann man, glaube ich, streiten (was wir hier aber nicht tun werden).

Beweis. wir betrachten dazu die Funktion $f(x) = \|xa + b\|^2$

$$\|xa+b\|^2 = x^2\|a\|^2 + 2x\langle a, b\rangle + \|b\|^2 \geq 0$$

*Originaltitel: In praise of Inequalities
[1] HGAM-Ungleichung
[2] Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel
[3] Ungleichung zwischen harmonischem und geometrischem Mittel

Wenn wir oBdA $a \neq 0$ annehmen und darüberhinaus auch $b = \lambda a$, dann gilt offensichtlich $\langle a, b\rangle^2 = \|a\|^2\|b\|^2$. Wenn andererseits a und b linear unabhängig sind, dann gilt $\|xa + b\|^2 > 0$ und die Diskriminante muß daher $\langle a, b\rangle^2 - \|a\|^2\|b\|^2$ kleiner 0 sein $\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

HGAM-Ungleichung. *Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen, dann gilt*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \tag{2}$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn alle a_i gleich sind.

Der nun folgende außerordentliche und schöne (also außerordentlich schöne) Induktionsbeweis geht (wahrscheinlich) auf Cauchy zurück.

Beweis. $P(n)$ bezeichne im Folgenden die GAM-Ungleichung, aufgeschrieben in der Form:

$$P(n): \qquad a_1 a_2 \ldots a_n \leq (\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n})^n \tag{3}$$

Der Fall $n = 1$ ist trivialerweise erfüllt. Für $n = 2$ reduziert sich (3) zu $a_1a_2 \leq (\frac{a_1+a_2}{2})^2 \Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 \geq 0$ letzteres ist offensichtlich richtig. Damit ist der Induktionsanfang $n = 2$ bewiesen.
Weiter geht es in folgenden zwei Schritten:

(A) Aus $P(n)$ folgt $\quad P(n-1)$

(B) Aus $P(n)$ und $P(2)$ folgt $\quad P(2n)$

womit dann die Ungleichung für alle n bewiesen wäre.
Zum Beweis von **(A)** sei $A := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$. Dann folgt

$$(\prod_{k=1}^{n-1} a_k)A \overset{P(n)}{\leq} (\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + A}{n})^n = (\frac{(n-1)A + A}{n})^n = A^n$$

$$\text{und daher:} \prod_{k=1}^{n-1} a_k \leq A^{n-1} = (\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1})^{n-1}, \quad \text{also} \quad P(n-1).$$

Für **(B)**, betrachten wir

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n} a_k = (\prod_{k=1}^{n} a_k)(\prod_{k=n+1}^{2n} a_k) &\overset{P(n)}{\leq} (\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n})^n (\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n})^n \\ &\overset{P(2)}{\leq} (\frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{n}}{2})^{2n} = (\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n})^{2n} \quad \text{also} \quad P(2n).\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung. Die HGM-Ungleichung läßt sich äquivalent in eine GAM-Ungleichung umformen und ist somit auch schon bewiesen.

Von ALZER stammt der folgende "Book-Proof" für die

(verallgemeinerte) GAM-Ungleichung.

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n \tag{4}$$

für beliebige positive reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n$ *und* $p_1, \dots, p_n$ *mit* $\sum_{i=1}^n p_i = 1$*. Diese geht für* $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ *in die GAM-Ungleichung über.*

Beweis. Im Folgenden bezeichne A die rechte Seite der Ungleichung, also $A := p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$ und G die linke: $G := a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}$. OBdA dürfen wir $a_1 \leq \dots \leq a_n$ annehmen. Offensichtlich ist dann $a_1 \leq G \leq a_n$, und es existiert ein k, so dass $a_k \leq G \leq a_{k+1}$.
Es folgt nun

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \int_{a_i}^{G} (\frac{1}{t} - \frac{1}{G}) dt + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} (\frac{1}{G} - \frac{1}{t}) dt \geq 0 \tag{5}$$

da ja alle Summanden ≥ 0 sind. Schreibt man diese Gleichung etwas um, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{G} dt \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{t} dt$$

Die linke Seite ist dann gleich

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{a_i - G}{G} = \frac{A}{G} - 1$$

und für die rechte Seite erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (\log(a_i) - \log(G)) = \log(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}) - \log(G) = 0$$

Beides zusammengenommen ergibt $\frac{A}{G} - 1 \geq 0$, und damit $A \geq G$.
Im Fall der Gleichheit müssen alle Integrale in (5) gleich 0 sein, woraus dann $a_1 = \dots = a_n = G$ folgt, bedenkt man, daß alle Integrale ≥ 0 sind. □

Unsere erste Anwendung für obige Ungleichungen ist der folgende **Satz von** LAGUERRE. In dem Beweis dazu spielt die CAUCHY-SCHWARZ**sche Ungleichung** eine entscheidende Rolle.

Theorem von Laguerre. *Angenommen, alle Nullstellen des Polynoms* $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ *seien reell. Dann sind alle Nullstellen im (abgeschlossenen) Intervall* $[b_1, b_2]$ *enthalten, wobei*

$$b_{1/2} = -\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}. \tag{6}$$

Beweis. Sei y eine Nullstelle und $y_1, \ldots, y_{n-1}$ die anderen. Dann kann man das Polynom auch schreiben als $(x-y)(x-y_1)\ldots(x-y_{n-1})$. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= y + y_1 + \ldots + y_{n-1} \\ a_{n-2} &= y(y_1 + \ldots + y_{n-1}) + \sum_{i<j} y_i y_j \end{aligned}$$

und damit

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2.$$

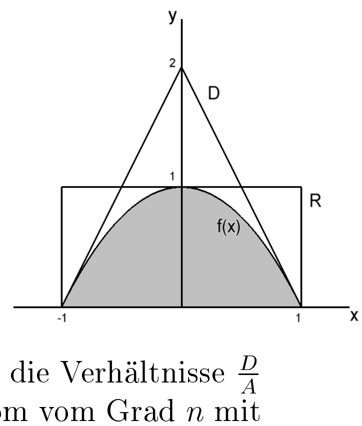
Indem man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf die Vektoren $\vec{y} := (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ und $\vec{e} := (1, 1, \ldots, 1)$ anwendet, erhält man:

$$\begin{aligned} (a_{n-1} + y)^2 &= (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})^2 = \langle \vec{y}, \vec{e} \rangle^2 \\ &\leq \|\vec{y}\|^2 \|\vec{e}\|^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2), \end{aligned}$$

oder in etwas anderer Form

$$y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y + 2\frac{n-1}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2 \leq 0$$

Damit liegt y (und somit auch alle y_i) innerhalb der beiden Nullstellen dieser quadratischen Polynoms, und diese Nullstellen sind unsere Intervallgrenzen.
$\Rightarrow$ Behauptung $\square$



Last but not least geht es nun um einen **Satz von Erdős und Grünwald**. Ausgangspunkt ist dabei eine allgemein bekannte Eigenschaft der Parabel. Betrachtet man zum Beispiel auf dem Intervall (-1,1) die Parabel $f(x) := 1 - x^2$. Fügt man noch das Tangential-Dreieck und das Tangential-Rechteck hinzu (vgl. nebenstehende Abbildung) so erhält man $\frac{2}{3}D = A = \frac{2}{3}R$, denn $A := \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{4}{3}$ und die Fläche des Dreiecks D ist 2, ebenso die des Rechtecks R.

P. Erdős und T. Gallai[4] fragten sich, unter welchen Bedingungen die Verhältnisse $\frac{D}{A}$ und $\frac{R}{A}$ beschränkt sind. Sei z.B. $f(x)$ ein beliebiges reelles Polynom vom Grad n mit

[4] T. Grünwald und T. Gallai scheinen ein und dieselbe Person zu sein, veröffentlicht wurde der Artikel im Mathematical Review unter dem Namen Grünwald, erarbeitet unter dem Namen Gallai

$0 < f(x)$ für $-1 < x < 1$ und $f(-1) = f(1) = 0$ ist. A ist dann gleich $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. Ferner nehme f sein Maximum im Punkt b an ($b \,\epsilon\, (-1,1)$). Die Fläche des Rechtecks ist dann $R = 2f(b)$. Für D ergibt sich folgender Wert[5]:

$$D = 2\frac{f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} \tag{7}$$

bzw. $D = 0$ falls $f'(1) = f'(-1) = 0$
Im Allgemeinen gibt es keine nicht-trivialen Schranken für $\frac{D}{A}$ und $\frac{R}{A}$. Man betrachte zum Beispiel $1 - x^{2n}$. Dann ist $D = 2n$ und $A = \frac{4n}{2n+1}$ und somit $\frac{D}{A} > n$. Dagegen strebt $\frac{R}{A}$ gegen 1 für n gegen unendlich. Denn $R = 2$ und somit $\frac{R}{A} = \frac{2n+1}{2n}$.
Erdős und Gallai konnten nun zeigen, daß solche Grenzen für Polynome mit (ausschließlich) reellen Nullstellen tatsächlich existieren:

Theorem von Erdös **und** Grünwald**.** *Sei f(x) eine reelle Polynomfunktion vom Grad $n \geq 2$ mit ausschließlich reellen Nullstellen und so dass $f(-1) = f(1) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x \,\epsilon\, (-1,1)$. Dann gilt*

$$\frac{2}{3}D \leq A \leq \frac{2}{3}R \tag{8}$$

Gleichheit tritt nur im Fall $n = 2$ ein.

Erdős und Gallai führten einen kniffligen Beweis über Induktion. G. Pólya legte (zumindest) für den linken Teil der Ungleichung einen eleganten Book-Proof vor, bei dem die HGAM-Ungleichung eine entscheidende Rolle spielt:

Beweis von $\frac{2}{3}D \leq A$ nach G. Pólya. Da $f(x)$ lediglich reelle Nullstellen hat, von denen keine im offenen Intervall $(-1,1)$ liegt, (Annahme $f(x) > 0$ auf eben diesem Intervall!) kann es in der Form

$$f(x) = (1-x^2)\prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x) \tag{9}$$

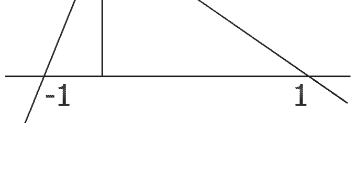
[5] Die Fläche des Dreiecks D ist genau y_0, wobei (x_0, y_0) der Schnittpunkt der beiden Tangenten an $f(x)$ in $x_2 = 1$ und $x_1 = -1$ ist. (vgl. nebenstehende Abb.) Die Tangenten erfüllen also die Gleichungen $y = f'(1)(x-1)$ und $y = f'(-1)(x+1)$. Schneidet man die Geraden, so erhält man

$$x_0 = \frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}$$

Für y_0 folgt dann

$$y_0 = f'(1)(\frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} - 1)) = 2\frac{f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}$$

und damit$D = \frac{1}{2}y_0(x_2 - x_1) = y_0$



mit $\alpha_i \geq 1$ und $\beta_j \geq 1$ geschrieben werden. Und so folgt

$$A = \int_{-1}^{1} (1-x^2) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) dx.$$

Durch die Substitution $x \to -x$, erhalten wir ebenso für A:

$$A = \int_{-1}^{1} (1-x^2) \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x) dx$$

und unter Anwendung der GAM-Ungleichung (man beachte, daß alle Faktoren ≥ 0 sind) folgt nun

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}[(1-x^2) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) + (1-x^2) \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x)] dx \\
&\geq \int_{-1}^{1} (1-x^2) (\prod_i (\alpha_i^2 - x^2) \prod_j (\beta_j^2 - x^2))^{\frac{1}{2}} dx \qquad (10) \\
&\geq \int_{-1}^{1} (1-x^2) (\prod_i (\alpha_i^2 - 1) \prod_j (\beta_j^2 - 1))^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \frac{4}{3} (\prod_i (\alpha_i^2 - 1) \prod_j (\beta_j^2 - 1))^{\frac{1}{2}} \qquad (11)
\end{aligned}$$

Mit Maple (oder auch per Hand) sieht man, dass

$$f'(1) = -2 \prod_i (\alpha_i - 1) \prod_j (\beta_j + 1) \qquad \text{und}$$

$$f'(-1) = 2 \prod_i (\alpha_i + 1) \prod_j (\beta_j - 1)$$

In (11) eingesetzt, erhält man sodann

$$A \geq \frac{2}{3} (-f'(1) f'(-1))^{\frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

Indem wir den Ausdruck (12) mit der HGM-Ungleichung abschätzt, erhalten wir

$$A \geq \frac{2}{3} \frac{2}{\frac{1}{-f'(1)} + \frac{1}{f'(-1)}} = \frac{4}{3} \frac{f'(1) f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} = \frac{2}{3} D,$$

also $A \geq \frac{2}{3} D$, was zu zeigen war. □

Beweis von $A \leq \frac{2}{3} R$. "Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen." □