Hilberts Drittes Problem

Oliver Fortmeier

Auf dem internationalen Kongress für Mathematiker 1900 in Paris formulierte Hilbert sein Drittes Problem:

> Zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in kongruente Tetraeder zerlegen lassen und die sich auch durch Hinzufügung kongruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in kongruente Tetraeder möglich ist.

Sein Schüler Max Dehn lieferte 1900 und 1902 in zwei Arbeiten den Beweis für diese Aussage. Der zusammen mit Arbeiten von V.F. Kagan, Hugo Hadwiger und Vladimir G. Boltianskii zu einem "Book Proof" wurde.

1 Ein bisschen lineare Algebra

Wir wollen als erstes auf einer endlichen Menge reeler Zahlen $M = \{m_1, ..., m_k\} \subset \mathbb{R}$ die Menge

$$V(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} q_i m_i \mid q_i \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}$$

definieren. Also die Menge aller $\mathbb{Q}$-Linearkombinationen von Zahlen aus M.
Es ist leicht zu sehen, dass $V(M)$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist, da $V(M)$ bezüglich endlicher Summenbildung und Skalarmultipilikation mit rationalen Zahlen abgeschlossen ist. Ebenso ist klar, dass $\dim_{\mathbb{Q}} V(M) \leq k = \sharp M$ gilt, da $V(M)$ von M aufgespannt wird.
Weiterhin benötigen wir $\mathbb{Q}$-lineare Abbildungen $f : V(M) \to \mathbb{Q}$. Für alle $q_i \in \mathbb{Q}$ mit $\sum_{i=0}^{k} q_i m_i = 0$ muss f folgende Eigenschaft besitzen:

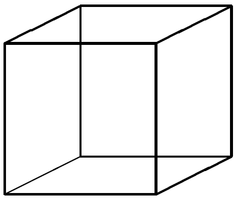
$$\sum_{i=1}^{k} q_i f(m_i) = f\left(\sum_{i=1}^{k} q_i m_i\right) = f(0) = 0$$

Diese Eigenschaft liefert uns das folgende

Lemma 1.1 *Für alle endlichen Mengen M, M' mit $M \subset M' \subset \mathbb{R}$ ist der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V(M)$ ein Unterraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $V(M')$. Ist $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung, so kann f zu einer $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung $f' : V(M') \to \mathbb{Q}$ fortgesetzt werden, so dass $f'(m) = f(m)$ für alle $m \in M$ gilt.*

Beweis: Jede $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $V(m) \to \mathbb{Q}$ ist durch die Abbildung der Basiselemente von $V(M)$ eindeutig bestimmt. Da M, M' endlich sind, kann man jede Basis von $V(M)$ zu einer Basis von $V(M')$ fortsetzen, und somit folgen die Behauptungen. $\square$

2 DEHNS Invarianten



$M_W = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$

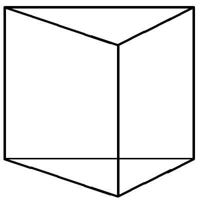
Für einen 3-dimensionalen Polyeder P, definieren wir M_P als die Menge der Winkel zweier benachbarter Flächen zusammen mit π. Für einen Würfel W erhalten wir also

$$M_W = \{\frac{\pi}{2}, \pi\},$$

während wir für ein orthogonales Prisma Q über einem gleichseitigen Dreieck

$$M_Q = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$$

bekommen.



$M_Q = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$

Definition 2.1 *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine endliche Menge mit $M_P \subset M$ für einen Polyeder P und $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung mit $f(\pi) = 0$. Dann ist die* DEHN Invariante von *P (bzgl. f) definiert als:*

$$D_f(P) := \sum_{e \in P} l(e) \cdot f(\alpha(e)),$$

wobei e die Kanten von P, $l(e)$ die Länge der Kante e und $\alpha(e)$ der Winkel zwischen den sich in e treffenden Flächen (Flächenwinkel) ist.

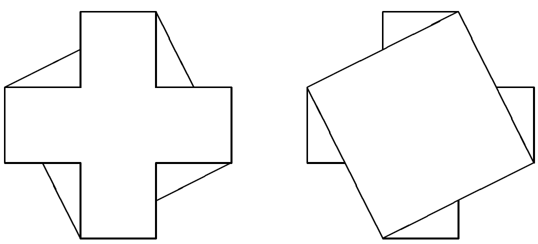
Da für jedes wie oben gefordertes f gilt $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}f(\pi) = 0$, ist die DEHN Invariante für den Würfel $D_f(W) = 0$.

3 Das DEHN-HADWIGER Theorem

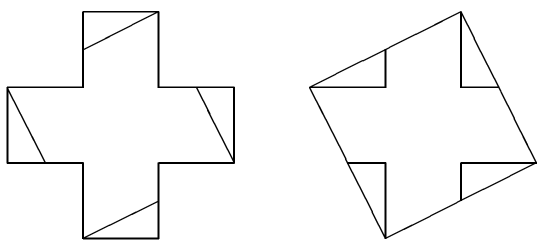
Wir wollen nun zwei Begriffe definieren

Definition 3.1 *a) Wir nennen zwei Polyeder P, Q* äquivalent zerlegbar, *wenn sie so in endlich viele $P_1, ..., P_n$ und $Q_1, ..., Q_n$ zerlegt werden können, dass P_i und Q_i kongruent für alle $1 \leq i \leq n$ sind. b) Seien $P, Q, P_1, ..., P_n$ und $Q_1, ..., Q_n$ Polyeder, wobei das Innere der P_i (bzw. Q_i) paarweise mit P (bzw. Q) disjunkt sind, mit P_i ist kongruent zu Q_i. Sind zudem $\tilde{P} := P \cup P_1 \cup ... \cup P_n$ und $\tilde{Q} := Q \cup Q_1 \cup ... \cup Q_n$ äquivalent zerlegbar, so nennen wir P und Q* äquivalent ergänzbar.

äquivalent ergänzbar



äquivalent zerlegbar



Ein Satz von GERLING (1844) besagt, dass es keinen Unterschied macht, ob man Spiegelungen bei Kongruenzverhalten betrachtet oder nicht.
Es ist ausserdem klar, dass äquivalent zerlegbare Polyeder äquivalent ergänzbar sind. Die Umkehrung ist dagegen nicht offensichtlich. Der folgende Satz von HADWIGER (Version von BOLTIANSKII) liefert uns das gewünschte Hilfsmittel, um Tetraeder mit gleichem Volumen zu finden, die nicht äquivalent ergänzbar und damit auch nicht äquivalent zerlegbar sind, so wie HILBERT vermutete.

Satz 3.2 *Seien P und Q Polyeder mit Flächenwinkeln $\alpha_1, ..., \alpha_p$ bzw. $\beta_1, ..., \beta_q$ an ihren Kanten. Und sei M eine endliche Menge reeller Zahlen mit*

$$\{\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q, \pi\} \subset M.$$

Ist $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ eine beliebige $\mathbb{Q}$-linerare Funktion mit $f(\pi) = 0$, so dass gilt:

$$D_f(P) \neq D_f(Q),$$

dann sind P und Q nicht äquivalent ergänzbar.

Beweis: in zwei Teilen
(1) Behauptung: Hat ein Polyeder P eine Zerlegung in endlich viele Polyeder $P_1, ..., P_n$ und sind alle Flächenwinkel dieser Polyeder in M enthalten, dann gilt für jedes $\mathbb{Q}$-lineare $f : V(M) \to \mathbb{Q}$:

$$D_f(P) = D_f(P_1) + ... + D_f(P_n)$$

Dazu: Wir ordnen jedem Teil einer Kante folgendermaßen eine *Masse* zu: Ist $e' \subset e$ ein Teil einer Kante von P, dann ist die Masse definiert durch:

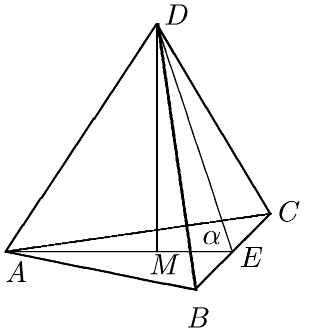
$$m_f(e') := l(e')f(\alpha(e')),$$

also die Länge mal dem Funktionswert des Flächenwinkels an dieser Kante.
Sei P in $P_1, ..., P_n$ zerlegt. Wir betrachten nun die Vereinigung aller Kanten der P_i, $\quad 1 \leqslant i \leqslant n$. Ist e' auch eine Kante von P, so addieren sich die Flächenwinkel der P_i an e' zu dem Flächenwinkel von P auf, und somit auch die Masse.
An jeder anderen Kante e'' eines P_i im Inneren einer Außenfläche von P oder im Inneren von P addieren sich die Flächenwinkel zu π oder 2π auf. Hier gilt aber nach der Definition von f: $f(\pi) = 0$ bzw. $f(2\pi) = 0$.
Also stimmt die Summe der Massen von den P_i-Kanten mit der von P überein, und somit auch die DEHN-Invariante.
(2) Annahme: Seien P und Q äquivalent ergänzbar.
Dazu: Wir können die Menge M zu einer Obermenge M' erweitern, die auch die Flächenwinkel aller ergänzten Polyeder P_i und Q_i, $\quad 1 \leqslant i \leqslant m$ enthält. Da wir nur endlich viele Polyeder ergänzen, ist M' auch endlich. Mit dem Lemma(1.1) können wir f zu $f' : V(M') \to \mathbb{Q}$ fortsetzen und erhalten unter Berücksichtigung von (1) folgende Gleichung:

$$D_{f'}(P) + D_{f'}(P_1) + ... + D_{f'}(P_m) = D_{f'}(Q) + D_{f'}(Q_1) + ... + D_{f'}(Q_m).$$

Nach der Definition von äquivalent ergänzbar sind P_i und Q_i für alle i kongruent und somit ist $D_{f'}(P_i) = D_{f'}(Q_i)$. Daraus folgt: $D_f(P) = D_f(Q)$. $\lightning$
$\Longrightarrow$ Beh. $\square$

Beispiel 1 (Reguläres Tetraeder)



Wir wollen die Flächenwinkel eines regulären Tetraeders T_0 mit Seitenlänge l berechnen. Der Mittelpunkt M des Grundflächen-Dreiecks, teilt die Höhe AE im Verhältnis 1:2. Da $|AE| = |DE|$ gilt, ist $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$. Damit erhalten wir:

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3}$$

Somit ist $M_{T_0} = \{\alpha, \pi\}$. Zudem ist nach Kapitel 6 Satz 4 (für n=9) $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$ irrational. $\Longrightarrow V(M_{T_0})$ ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis M_{T_0} und es existiert eine $\mathbb{Q}$-lineare Funktion $f : V(M_{T_0}) \to \mathbb{Q}$ mit

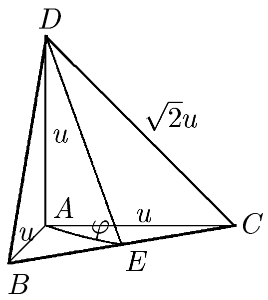
$$f(\alpha) := 1, f(\pi) := 0.$$

Für dieses f haben wir die DEHN-Invariante

$$D_f(T_0) = 6lf(\alpha) = 6l \neq 0.$$

Daher ist sind *ein reguläres Tetraeder und ein Würfel nicht äquivalent ergänzbar oder äquivalent zerlegbar.*

Beispiel 2 ("orthogonales" Tetraeder)



Sei T_1 ein Tetraeder, dass von drei orthogonalen Kanten AB, AC, AD mit Länge u aufgespannt wird. T_1 hat drei rechte Flächenwinkel und drei weitere Winkel, der Größe φ, die wir durch

$$\cos\varphi = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}u}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2}u} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

bestimmen. Also erhalten wir:

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Für $M_{T_1} := \{\frac{\pi}{2}, \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, \pi\}$ hat der $\mathbb{Q}$-Vektorraum die Dimension 2, da π und $\frac{\pi}{2}$ linear abhänig sind, also gilt $V(M_{T_1}) = V(\{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, \pi\})$. Es existiert keine rationale Abhänigkeit zwischen $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ und π, da $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ nach Kapitel 6 Satz 1 ($n = 3$) irrational ist.
Definieren wir eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung f durch

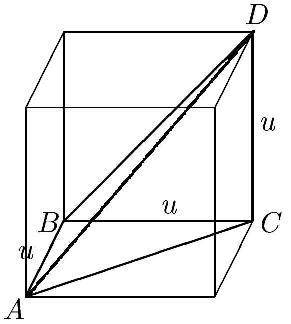
$$f(\pi) := 0 \quad \text{und} \quad f(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}) := 1$$

für die somit auch $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ gilt, erhalten wir für die DEHN-Invariante:

$$D_f(T_1) = 3u\,f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\sqrt{2}u\,f\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\sqrt{2}u \neq 0.$$

Damit ist gezeigt, dass T_1 und ein Würfel mit gleichem Volumen weder äquivalent ergänzbar noch äquivalent zerlegbar sind.

Beispiel 3



Nun sei T_2 ein Tetraeder, mit drei aufeinanderfolgenden orthogonalen Kanten AB, BC, CD der Länge u. Hier werden wir die Flächenwinkel nicht explizit berechnen $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ Sondern folgendermaßen argumentieren. Ein Würfel mit Grundseite u kann in 6 solche Tetraeder zerlegt werden (3 die kongruent zu dem angegeben sind und 3 spiegelverkehrte).

All diese Tetraeder haben dieselbe DEHN-Invariante, und für jedes f gilt:

$$D_f(T_2) = \frac{1}{6} D_f(W) = 0.$$

Damit verschwinden für alle $\mathbb{Q}$-linearen Abbildungen die DEHN-Invarianten dieses Tetraeders. Damit ist HIBERTS-Problem gelöst, da wir im Beispiel 2, ein Tetraeder mit derselben Grundfläche und Höhe betrachtet hatten, für das galt: $D_f(T_1) \neq 0$.