# Cotangens und der Herglotztrick

Jens Hansen

30. Mai 2001

## Partialbruchentwicklung des Cotangens

Nach Ansicht einiger Mathematiker ist eine der interessantesten Formeln, welche elementare Funktionen beinhaltet, die Partialbruchentwicklung des Cotangens:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}). \tag{$*$}$$

Diese Formel, welche zuerst von Leonard Euler in seinem epochalen Werk *Introductio in Analysin Infinitorum* bewiesen wurde, wird im Rahmen dieser Abhandlung anhand einer erstaunlich einfachen Methode, des sogenannten*Herglotz-Tricks*, hergeleitet. Seien für $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

$$f(x) := \pi \cot \pi x, \qquad g(x) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}.$$

Bei der Funktion $g$ ist Vorsicht geboten, da diese Summe nur bedingt konvergent ist, so dass der Grenzwert von der Reihenfolge der Summation abhängt.
Unser Ziel ist es nun Eigenschaften der Funktionen $f$ und $g$ herzuleiten, so dass wir am Schluss folgern können, dass diese gleich sind:

(i) $f$ und $g$ sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

(ii) $f$ und $g$ sind 1-periodisch.

(iii) $f$ und $g$ sind ungerade Funktionen.

(iv) $f$ und $g$ erfüllen die selbe Funktionalgleichung:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) &= 2f(x) \\ g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) &= 2g(x) \end{aligned}$$

(v) Sei $h := f - g$, dann ist $h$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ durch $h(x) = 0$ stetig fortsetzbar, und besitzt die Eigenschaften (i)-(iv).

zu (i): Da $\pi \cot \pi x = \pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist, ist diese Eigenschaft für $f$ offensichtlich erfüllt. Um die Stetigkeit von $g$ zu zeigen, sei zuerst bemerkt, dass $a_n := \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = -\frac{2x}{n^2-x^2}$, im Definitonsbereich von $g$ stetig ist. Damit reicht es zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ in einer Umgebung von $x$ gleichmässig konvergiert. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq 2$ und $2n_0 - 1 \geq x^2$, dann gilt $n^2 - x^2 > (n-1)^2$ für alle $n \geq n_0$, so dass die gleichmässige Konvergenz mit dem Weierstrasschen Majorantenkriterium folgt, denn es gibt nur endlich viele Terme $\frac{1}{n^2-x^2}$ mit $n < n_0$ und die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

konvergiert.

zu (ii): Da

$$\cot(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cot x$$

gilt, ist $f$ 1-periodisch.
Sei $g_N := \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{n+x}$, dann gilt

$$\begin{aligned} g_N(x+1) &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{n+x+1} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{n+x} \\ &= \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \frac{1}{n+x+1} + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1} \\ &= g_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1} \end{aligned}$$

und

$$g(x+1) = \lim_{N\to\infty} g_N(x+1) = \lim_{N\to\infty} \left( g_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1} \right) = g(x).$$

zu (iii): Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ gilt

$$f(-x) = \frac{\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)} = -\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = -f(x).$$

Da $-x+n = -(x-n)$, folgt, dass

$$g(-x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{-x+n} = -\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x-n} = -g(x).$$

zu (iv): Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, dann folgt mit den Additionstheoremen für sin und cos [1]

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{\pi(x+1)}{2}\right)}\right] \\
&= \pi\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right] \\
&= \pi\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right] \\
&= 2\pi\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x}{2}\right)} = 2f(x).
\end{aligned}$$

Die analoge Aussage für $g$ folgt durch den Grenzübergang $N \to \infty$ aus

$$g_N\left(\frac{x}{2}\right) + g_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1},$$

was wiederum aus

$$\frac{1}{\frac{x}{2}+n} + \frac{1}{\frac{x+1}{2}+n} = 2\left(\frac{1}{x+2n} + \frac{1}{x+2n+1}\right)$$

folgt.

zu (v): Die Funktion $h$ besitzt für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ offensichtlich die Eigenschaften (i) bis (iv). Betrachten wir zuerst den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\pi\cot\pi x - \frac{1}{x}\right)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\cot x - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} &\overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} \\
= -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} &\overset{„\frac{0}{0}“}{=} -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{x\to 0}\left(\pi\cot\pi x - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Da

$$g(x) - \frac{1}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2-x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

gilt, ist $h$ durch $h(0) = 0$ stetig fortsetzbar. Da mit $f$ und $g$ auch $h$ 1-periodisch ist, ist $h$ durch 0 in allen $x \in \mathbb{Z}$ stetig fortsetzbar.

[1]
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

Nun kommen wir zum kritischen Punkt in diesem Beweis. Da $h$ stetig und 1-periodisch ist, besitzt $h$ ein Maximum[2] $m$. Sei $x_0 \in [0,1]$ mit $h(x_0) = m$, dann folgt mit der Funktionalgleichung

$$h\left(\frac{x_0}{2}\right) + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2h(x_0) = 2m,$$

also muss schon $h\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$ gelten. Mittels Iteration folgt $h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, da $h$ stetig ist folgt

$$m = \lim_{n\to\infty} h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = h\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{2^n}\right) = h(0) = 0.$$

Damit muss $h(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Da aber $h$ ungerade ist folgt aus $h(x) < 0$, schon $h(-x) = -h(x) > 0$, also muss $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Damit ist die Behauptung bewiesen.
Der Herglotz-Trick besteht also darin, dass Maximum der periodischen Funktion mittels der Funktionalgleichung geeignet abzuschätzen.
Ohne in dieser Abhandlung näher darauf eingehen zu wollen, wird jetzt noch ein Ergebnis zitiert, für eine nähere Behandlung dieses Ergebnisses verweise ich auf die Arbeit [Elstr].

*Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige und 1-periodische Funktion, die der Funktionalgleichung*

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2cf(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

*mit konstantem $c \in \mathbb{C}$ genügt. Dann gilt:*

(a) *Ist $|c| \geq 1$ und $c \neq 1$, so ist $f = 0$.*

(b) *Ist $c = 1$, so ist $f$ konstant.*

*Ersetzt man die Bedingung der Stetigkeit durch die Voraussetzung, dass $f$ auf $[0,1]$ Lebesgue-integrierbar ist und (1) durch*

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2cf(x) \text{ f. ü.} \tag{2}$$

*so erhält man*

(a) *Ist $|c| \geq 1$ und $c \neq 1$, so ist $f = 0$ f.ü. .*

(b) *Ist $c = 1$, so ist $f$ f.ü. konstant.*

(c) *Für $|c| < 1$ existieren unendlich viele linear unabhängige stetige Lösungen von (2). Zum Beispiel sind*

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c^k e^{2\pi i 2^k x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

*und*

$$\varphi_m(x) = \varphi(mx) \quad (x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, m \equiv 1 \mod 2)$$

*stetige Lösungen von (2).*

[2] $h\big|_{[0,1]}$ ist gleichmässig stetig auf $[0,1]$ und nimmt daher dort ein Maximum an.

# Anwendung der Partialbruchzerlegung

Eine interessante Anwendung der obigen Partialbruchentwicklung des Cotangens ist die Herleitung der Werte $\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{N}$. Dazu multiplizieren wir $(*)$ mit $x$ und substituieren $y = \pi x$ und erhalten für $y < \pi$:

$$\begin{aligned} y \cot y &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{y}{\pi n}\right)^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k} \\ &= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) y^{2k}. \end{aligned}$$

Für die letzte Umformung beachte man die absolute Konvergenz der geometrischen Reihe, der Partialbruchentwicklung und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k} = \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k}$$

Damit erhält man nun folgendes Zwischenresultat

> Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist der Koeffizent von $y^{2k}$ in obiger Entwicklung von $y \cot y$ gleich
>
> $$[y^{2k}] y \cot y = -\frac{2}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k).$$

Nun kann man aber $y \cot y$ auch noch auf eine andere Weise entwickeln:

$$y \cot y = y \frac{\cos y}{\sin y} = iy \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{e^{iy} - e^{-iy}} = iy \frac{e^{2iy} + 1}{e^{2iy} - 1},$$

und erhält, wenn man $z = 2iy$ substituiert

$$y \cot y = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}.$$

Die Funktion $b(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig fortsetzbar, für $z = 0$ setze[3] $b(z) = 1$, und ist die erzeugende Funktion der Bernoulli-Zahlen $B_n$:

$$\frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

[3] $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{e^z - 1} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{e^z} = 1$ mit der Regel von l'Hospital.

Nun erhält man aus

$$\begin{aligned} z &= (e^z - 1)\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \end{aligned}$$

Die Koeffizenten $c_n$ erhält man aus dem Cauchy-Produkt :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!},$$

wenn man beachtet das der Koeffizent $[0](e^z - 1) = 0$ erfüllt. Durch Koeffizentenvergleich erhält man folgende Rekursionsformel für die BERNOULLI-Zahlen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1, & \text{für } n = 1 \\ 0, & \text{für } n \neq 1. \end{cases}$$

Damit erhält man folgende Liste von BERNOULLI-Zahlen:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_n$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{1}{42}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{5}{66}$ |

Durch Einsetzen erhält man nun

$$y \cot y = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{(2iy)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} y^{2k}$$

und durch Vergleich beider Entwicklungen ergibt sich

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Somit erhält man folgende Werte für $\zeta(2k)$:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}, \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{638512875}, \ldots$$

Da

$$\lim_{k\to\infty} \zeta(2k) = 1$$

gilt, folgt, dass $|B_{2k}|$ sehr schnell wächst, was von den ersten Werten nicht klar ist. Im Gegensatz zu den Werten $\zeta(2k)$ der $\zeta$-Funktion , ist über die Wert $\zeta(2k+1)$ wenig bekannt. Als historische Anermkung kann man noch vermerken, dass EULER zuerst einige Werte der $\zeta$-Funktion berechnet hat und erst durch den Wert $\zeta(12)$ durch den Zähler $691\pi$ auf die Verbindung zu den BERNOULLI-Zahlen gekommen ist.

# Literatur

[Elstr] Jürgen Elstrodt, Partialbruchentwicklung des Kotangens, Herglotztrick und die Weierstraßsche stetige nirgends differenzierbare Funktion, Math. Semesterberichte, 1998, Seite 207-220

[Proof] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, Proofs from the Book, Springer Verlag, 2000, Seite 119-124