Buffons Nadel Problem

Niko Wilbert

Hintergrund

Der französische Adelige Comte de Buffon beschäftigte sich 1777 mit folgendem Problem

> *Angenommen, man lässt eine kurze Nadel auf ein Blatt liniertes Papier fallen - wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dass die Nadel so liegen bleibt, dass sie eine der Linien schneidet?*

Mit kurz ist gemeint, dass die Länge der Nadel kleiner oder gleich dem Linienabstand ist. Sonderfälle die dadurch entstehen, das die Nadel auf einer Linie liegt (parallel) oder eine Nadel der Länge $l = d$ zwei Linien berührt (orthogonal) brauchen nicht berücksichtigt werden, da die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Fälle genau 0 ist.
Die Antwort hängt vom Wert der Zahl π ab:

> *Wird eine Nadel der Länge l auf einem Papier mit Linien im Abstand $d \geq l$ fallengelassen so beträgt die Wahrscheinlichkeit p, dass die Nadel eine Linie schneidet, genau*
> $$p = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}$$

Führt man den Versuch also praktisch durch so kann man auf diese Weise einen Näherungswert von π erhalten. Der Beweis läßt sich sehr schnell über Integration führen. Eleganter (da ohne Integration) ist dagegen der Beweis den E. Barbier 1860 vorlegte.

Der "Book Proof" von Barbier

Bei dem Beweis betrachtet man statt der Wahrscheinlichkeit die durchschnittliche Anzahl der Schnittpunkte zwischen Nadel und Linien.
Für den Beweis geht man zunächst allgemein von $d \in \mathbb{R}_+^*$ und $l \in \mathbb{R}_+$ aus, also ohne die Einschränkung $l \leq d$. Die durchschnittliche Anzahl der Schnittpunkte E ist dann genau

$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeit ist, dass es genau i Schnittpunkte gibt. Die Wahrscheinlichkeit p, dass es mindestens einen Schnittpunkt gibt ist

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

Für den Fall $l \leq d$ ist also $p = E$. Es reicht daher den Wert von E zu bestimmen, was sich als deutlich einfacher erweist.
Man betrachtet nun E in Abhängigkeit von l (wobei d konstant bleibt). $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ , l \mapsto E(l)$ ist eine lineare Funktion. Beweis:

- Es gilt
  $$E(x + y) = E(x) + E(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$$
  denn die Schnittpunkte einer Nadel der Länge $l = x + y$ liegen immer in einem der beiden Teile. Der Fall dass der Schnittpunkt genau an der Grenze liegt hat wieder die Wahrscheinlichkeit 0.

Dass die Position des einen Teils der Nadel durch den anderen festgelegt wird, d.h. die Teilnadeln nicht unabhängig sind spielt keine Rolle, denn die Wahrscheinlichkeit bleibt trotzdem für alle möglichen Positionen der zweiten Teilnadel gleich.

- Nun zeigt man zuerst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $E(nx) = nE(x)$. Dies folgt ganz einfach durch Induktion aus der Additivität. Als nächstes zeigt man die Linearität für alle $r \in \mathbb{Q}_+$. Mit $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$mE\left(\frac{n}{m}x\right) = E\left(m\frac{n}{m}x\right) = E(nx) = nE(x)$$

woraus nach Division der ganzen Gleichung durch m folgt (für $r = 0$ gilt die Gleichung trivialerweise)

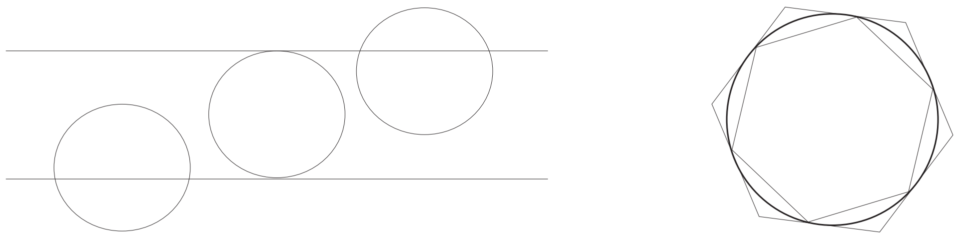
$$E(rx) = rE(x) \qquad \forall\, r \in \mathbb{Q}_+$$

Aus der Monotonie und der Stetigkeit in $\mathbb{Q}_+$ von $E(x)$ folgt schließlich die Linearität auch für positive reelle Faktoren.

Aus der Linearität folgt, dass für eine polygonale Nadel E den gleichen Wert hat wie für eine gerade Nadel, nur die Gesamtlänge ist entscheidend (für die Wahrscheinlichkeit p mindestens eines Schnittpunktes gilt dies natürlich nicht).
Da E eine streng monoton wachsende lineare Funktion ist existiert ein $c \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$E(l) = cl \qquad \forall\, l \in \mathbb{R}_+$$

Um c zu bestimmen denkt man sich nun eine kreisförmige Nadel C mit Durchmesser d. Offensichlich schneidet diese Nadel die Linie immer an zwei Punkten. Den Kreis kann man nun durch Polygone annähern.



Dabei benutzt man jeweils zwei geschlossene Polygone mit n Ecken und gleichen Kantenlängen. P_n sei dem Kreis einbeschrieben, d.h. die Eckpunkte liegen auf dem Kreis. P^n schließt dagegen den Kreis ein, d.h. die Kanten liegen in ihrem Mittelpunkt tangential an den Kreis an.
Es gilt dann offensichtlich

$$E(P_n) < E(C) < E(P^n)$$

denn jede Linie die P_n schneidet schneidet auch C und jede Linie die C schneidet schneidet auch P^n. Setzte nun $E(C) = 2$ ein und benutze die Linearität von E (da die eingeschlossenen Flächen jeweils Teilmengen sind). So erhält man

$$c\,l(P_n) < 2 < c\,l(P^n)$$

wobei $l(P_n)$ bzw. $l(P_n)$ die Länge des Polygons sei. Da die beiden Polygone C für $n \to \infty$ beliebig genau annähern gilt

$$\lim_{n\to\infty} l(P_n) = d\pi = \lim_{n\to\infty} l(P^n)$$

Setzte dies nun in die Ungleichung ein und erhalte

$$cd\pi \leq 2 \leq cd\pi$$

woraus folgt

$$c = \frac{2}{\pi}\frac{1}{d}$$

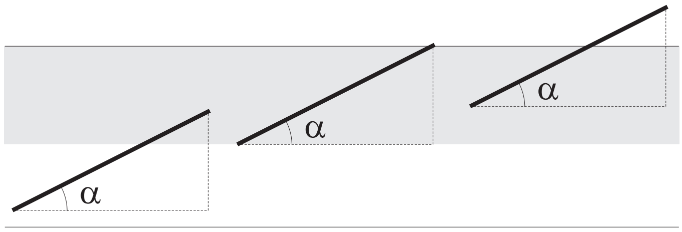
Es ist also allgemein

$$E(l) = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}$$

Da für $l \leq d$ außerdem $p = E$ ist folgt damit die Behauptung. □

Beweis durch Integration

Für den Beweis durch Integration betrachtet man den spitzen Winkel α den die Nadel mit den Linien einschließt.



Die Wahrscheinlichkeit dass eine kurze Nadel ($l \leq d$) mit Winkel α eine Linie schneidet beträgt $\frac{l \sin\alpha}{d}$.
Um nun die allgemeine Wahrscheinlichkeit zu erhalten integriert man die Wahrscheinlichkeiten über alle möglichen Winkel (von 0 bis $\frac{\pi}{2}$) und bildet den Mittelwert (teilt durch den Winkelbereich). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p ist also

$$p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l \sin\alpha}{d}\, d\alpha = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}\left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}$$

□

Für lange Nadeln, also $l > d$, läßt sich p analog bestimmen. Für $l \sin\alpha < d$ bzw. $\alpha < \arcsin\frac{d}{l}$ ist die Wahrscheinlichkeit eines Schnittpunktes weiterhin $\frac{l \sin\alpha}{d}$.
Für größere α ist die Wahrscheinlichkeit dagegen 1 (und nicht größer). Man muß das Integral daher zerlegen. Es gilt also

$$\begin{aligned}
p &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\arcsin\frac{d}{l}} \frac{l \sin\alpha}{d}\, d\alpha + \int_{\arcsin\frac{d}{l}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\alpha\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}\left[-\cos\alpha\right]_0^{\arcsin d/l} + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{d}{l}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}}\right] - \arcsin\frac{d}{l}\right)
\end{aligned}$$

Für $l = d$ erhält man wie gewünscht $\frac{2}{\pi}$ und für $l \to \infty$ ergibt sich 1. Zudem kann man noch zeigen, dass der Ausdruck monoton wachsend in l ist.