Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 29. Mai 2001

7. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 15.06.2001, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Gibt es eine Funktion, die in einem Gebiet G, das den Nullpunkt Nullpunkt enthält holomorph ist und in den Punkten $z = \frac{1}{n} \in G$, $(n \in \mathbb{N})$ der Reihe nach die Werte

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots$

annimmt?

Aufgabe 2 (3+3 Punkte):

a) In Abhängigkeit von $R \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1, 2\}$ berechne man

$$\int_K \frac{z^4 + z^2 + 1}{z(z^2+1)}\, dz,$$

wobei $K := \{z \in \mathbb{C}; |z - i| = R\}$.

b) Für $|a| < r < |b|$, wobei $a, b \in \mathbb{C}$ sind, und $n, m \in \mathbb{N}$ berechne man

$$\int_K \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m},$$

wobei $K := \{z \in \mathbb{C}; |z| = r\}$.

Aufgabe 3 (L, 6* Punkte):

a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\overline{K_1(0)} \subset U$ und $f(0) = 1$. Man berechne die Integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_1(0)} \left(2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{f(z)}{z}\, dz$$

und zeige

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(e^{i\varphi}\right) \cos^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi &= 2 + f'(0), \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(e^{i\varphi}\right) \sin^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi &= 2 - f'(0). \end{aligned}$$

b) Unter den Voraussetzungen von a) zeige man die Abschätzung

$$|\mathrm{Re}(f'(0))| \leq 2,$$

falls $\mathrm{Re}(f(z)) \geq 0$ ist für alle $|z| = 1$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Man prüfe, ob die folgenden Funktionen in den Nullpunkt hinein holomorph fortsetzbar sind:

a) $z \cdot \cot z$,

b) $\frac{z}{e^z - 1}$,

c) $z^2 \sin \frac{1}{z}$.

Aufgabe 5 (2+4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie für alle $w \in \mathbb{C}$ die w-Stellen mit Vielfachheit von $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$. (Man beachte dabei, wann eine w-Stelle definiert ist.)

b) Für welches maximale $D \subset \mathbb{C}$ ist

$$f : D \to \mathbb{C}, \;\; f(z) = \left(z \sin \frac{1}{z}\right)^n \frac{\sin iz}{e^z - 1}.$$

wohldefiniert. (Dabei ist f in einem Punkt wohldefiniert, falls der Funktionswert erklärt ist oder der Funktionswert über stetige Ergänzbarkeit erklärt werden kann.) Nun gebe man alle Nullstellen mit Vielfachheit an. Dabei beachte man wieder die Voraussetzungen der Definition einer w-Stelle.

Aufgabe 6* (siehe Topologie und Algebra)

Sei G ein Gebiet und $\mathcal{H}(G)$ der Ring der holomorphen Funktionen auf dem Gebiet G. Desweiteren sei $z_0 \in G$ und

$$\operatorname{ord}_a(f) = \begin{cases} n, & \text{falls } f \text{ in } a \text{ eine Nullstelle der Ordnung } n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ hat.} \\ 0, & \text{falls } f \text{ in } a \text{ keine Nullstelle hat.} \end{cases}$$

Im Verlauf dieser Aufgabe sei für $a > 1$ der Ausdruck $a^{-\infty} := 0$ definiert.

a) Beschreiben Sie die Einheiten sowie die irreduziblen Elemente und die Primelemente von $\mathcal{H}(G)$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}(G)$ kein faktorieller Ring (auch ZPE-Ring genannt) ist.

c) Man zeige, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{d} : \quad \mathcal{H}(G) \times \mathcal{H}(G) &\to \mathbb{R} \\ (f, g) \qquad &\mapsto 2^{-\operatorname{ord}_{z_0}(f-g)} \end{aligned}$$

eine Ultrametrik ist.