Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 22. Mai 2001

6. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Montag, 11.06.2001, 9.00 Uhr

Organisatorisches: Ein qualifizierter Studiennachweis (qSt) wird in der Analysis IV denjenigen Lehramtskandidaten ausgestellt, die 1/3 der Übungspunkte erreicht haben und mindestens einmal vorgerechnet haben. Die dafür geeigneten Aufgaben werden ab jetzt mit L gekennzeichnet und werden deshalb nicht in der Frontal-Übung vorgerechnet. Das Vorrechnen dieser Aufgaben wird in der Diskussionsstunde stattfinden, entweder von einem Lehramtskandidaten oder bei Interesse wird diese Aufgabe gemeinsam erarbeitet werden. Bei Interesse am Vorrechnen melden Sie sich bitte beim Assistenten Axel Marschner, damit er sie für das Vorrechnen eintragen kann. Dabei werden diejenigen, die sich zuerst anmelden, auch zuerst berücksichtigt. Die mit L gekennzeichneten Aufgaben sind klausur-relevant.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte):
Sei $F : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$,

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{Log} z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

a) Wo ist F stetig?

b) Wo ist F komplex differenzierbar? Wo ist F holomorph?

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte):
Sei M die Menge aller Wege in einer offenen Menge U. Für $\gamma_1, \gamma_2 \in M$ sei $\gamma_1 \sim \gamma_2$ genau dann, wenn γ_2 eine Umparametrisierung (im Sinne von Definition XVII (1.8)) von γ_1 ist.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

Beweisen Sie außerdem für $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^*, \gamma_2^* \in M$:

b) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow \gamma_1^- \sim \gamma_2^-$;

c) Gilt $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $\gamma_1^* \sim \gamma_2^*$ und stimmen der Endpunkt von γ_1 und der Anfangspunkt von γ_1^* überein, so gilt:

$$\gamma_1 \oplus \gamma_1^* \sim \gamma_2 \oplus \gamma_2^*.$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):
Untersuchen Sie, ob die folgenden Wege γ_1, γ_2 jeweils im Sinne von Aufgabe 2 äquivalent sind:

a) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_1(t) := r \cdot e^{it}$; $\quad \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_2(t) := r \cdot e^{-it}$, $r > 0$.

b) $\gamma_1 : [1, 2] \to \mathbb{C}, \gamma_1(t) := t^2 - 1$; $\quad \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}, \gamma_2(t) := t^2 + 2t$.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)
Es sei $\gamma = [1+i, 2i]$. Man berechne die Integrale der folgenden Funktionen über γ:

a) $\cos[(1+i)z]$,

b) $iz^2 + 1 - 2iz^{-2}$,

c) $z \cdot e^{iz^2}$.

Aufgabe 5 (3+3+3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{Log} z = \int_{[1,z]} \frac{1}{w}\, dw \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}_-.$$

b) Berechnen Sie
$$\int_{[-1,z]} \frac{1}{w}\, dw \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+.$$

c) Berechnen Sie
$$\int_{[-1-i,1-i,i,-1-i]} \frac{1}{z}\, dz.$$

Aufgabe 6 (L, 4* Punkte)
Seien a, $b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \setminus \{-b/a\} \to \mathbb{C}$ definiert durch
$$f(z) = \frac{1}{az+b},$$
lokal eine Stammfunktion besitzt. Besitzt f auch global eine Stammfunktion? Für diese Aufgabe benutzen Sie bitte nur die Ergebnisse einschliesslich Kapitel XVII.