LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 17. Mai 2001

5. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 25.05.2001, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (3+3+4* Punkte):

a) Beweisen Sie die folgende l'Hospitalsche Regel: Für zwei in z_0 komplex differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$ gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^3$. Man beweise, dass für alle ξ auf der Strecke $\mathrm{Sp}\,[1, i]$ gilt:

$$\frac{f(i) - f(1)}{i - 1} \neq f'(\xi),$$

d. h. für Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung nicht.

c*) Man gebe eine komplexe Version des verallgemeinerten Mittelwertsatzes aus der Analysis II Übung 11 Aufgabe 1c) für holomorphe Funktionen an, indem man zu $\widetilde{f}$ übergeht, und beweise diesen Satz.

Aufgabe 2 (4+4 Punkte):

a) Gelten auch in $\mathbb{C}$ die reellen Beziehungen (wobei $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*,\ k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(z_1 z_2) &= \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2), \\ \mathrm{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \mathrm{Log}(z_1) - \mathrm{Log}(z_2), \\ \mathrm{Log}(z^k) &= k \cdot \mathrm{Log}\, z \quad ? \end{aligned}$$

Wie lauten die optimalen Aussagen analog zu (4.5) e).

b) Für $z \in \mathbb{C}$ sei die Menge $\log z$ definiert als

$$\log z := \{w \in \mathbb{C};\ w = \mathrm{Log}\, z + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Zeigen Sie, dass für diese Mengen $\log z$ die Gleichheiten

$$\begin{aligned} \log(z_1 z_2) &= \log(z_1) + \log(z_2), \\ \log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \log(z_1) - \log(z_2), \\ \log(z^k) &= \{w \in \mathbb{C}; w = k\,\mathrm{Log}\, z + 2\pi i m,\ m \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

gelten. Insbesondere mache man sich klar, dass i. A. $\log(z^k) \neq k \log z$.

Aufgabe 3 ((6+3*)+3+4 Punkte):

a) Der Menge $D \subset \mathbb{C}_-$ ordnet man die Menge

$$\widehat{D} := \{\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^* \times (-\pi;\pi);\ re^{i\varphi} \in D\}$$

zu. Vermöge dieser Abbildung ist jedem $z \in \mathbb{C}_-$ ein $\widehat{z} \in \mathbb{R}_+^* \times (-\pi;\pi)$ zugeordnet. (Zusatzteil: Man mache sich klar, ob die Aussagen aus Bemerkung (1.2) für diese Darstellung des $\mathbb{C}_-$ gelten. Weswegen wurde nur $\mathbb{C}_-$ benutzt?)
Sei nun $D, W \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$. Damit sind $\widehat{W}$ und $\widehat{D}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}_+^* \times (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Zu einer Funktion $f : D \to W$ betrachte man die zugeordnete Abbildung

$$\widehat{f} : \widehat{D} \to \widehat{W},\ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(re^{i\varphi}) \\ \operatorname{Im} f(re^{i\varphi}) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} R\cos\Phi \\ R\sin\Phi \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass dann die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen die Form

$$\begin{aligned} \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \\ \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \varphi} &= -r\frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{aligned}$$

annehmen, sofern die partiellen Ableitungen existieren.

b) Man prüfe, ob die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f(z) \quad := \quad & \exp\left(-\sqrt{x^2+y^2}\, e^{-\arctan\frac{y}{x}}\right) \\ & \cdot \left\{\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\, e^{-\arctan\frac{y}{x}}\right) + i\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\, e^{-\arctan\frac{y}{x}}\right)\right\} \end{aligned}$$

auf $D := \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ und } 0 < |z| < \frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\}$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt.

c) Man bestimme alle ganzen Funktionen f mit $\operatorname{Re}(f(x+iy)) = ax^2 + by^2 + cxy + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.