Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 03. Mai 2001

3. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 11.05.2001, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (3+3 Punkte):
Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes die folgenden Integrale, wobei man besonderen Wert auf die Voraussetzungen lege.

a)
$$\int_{\partial A} 2y\,dx - 2x\,dy + z^2 x\,dz$$
für $\partial A = \{(x,y,z)^{tr} \in \mathbb{R}^3; x = \cos t,\ y = \sin t, z = 5, 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

b)
$$\int_{\partial A} yz^2\,dx + (xz^2 - 2y)\,dy + 2xyz\,dz$$
für $\partial A = \{(x,y,z)^{tr} \in \mathbb{R}^3; x = \cos t,\ y = \sin t, z = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte):

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ konvex, offen und $F = (F_1, F_2, F_3)^t : U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann sind äquivalent:
   (i) F ist ein Gradientenfeld auf U.
   (ii) $\operatorname{rot} F = 0$ auf U.

b) Gilt die Aussage von a) auch, falls U nicht konvex ist?

Aufgabe 3 (3+3+3 Punkte):
Konstruieren Sie jeweils komplexe Folgen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften a) oder b) oder c):

a) $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen (endlichen) Häufungspunkt.

b) $z_k \in K_1(0) = \{z\,;\,|z| < 1\}, k \in \mathbb{N}$, und die Häufungspunkte von $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind genau die Punkte von $K_1(0)$.

c) Jede komplexe Zahl ist Häufungspunkt von $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte):
Zeigen Sie für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\ \cos(x+iy) &= \ \ \cos x \cdot \cosh y,\\
\operatorname{Im}\ \cos(x+iy) &= -\sin x \cdot \sinh y,\\
\operatorname{Re}\ \sin(x+iy) &= \ \ \sin x \cdot \cosh y,\\
\operatorname{Im}\ \sin(x+iy) &= \ \ \cos x \cdot \sinh y,\\
|\sin(x+iy)| &\leq \ \ \cosh y,\\
|\cos(x+iy)| &\leq \ \ \sinh |y|.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (3+3 Punkte):
Zeigen Sie:

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$, $z \in \mathbb{C}$, hat den Konvergenzradius 1 und divergiert in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

b) Geben Sie eine komplexe Potenzreihe an, die genau in den Punkten $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$ absolut konvergiert.