Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 26. April 2001

2. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 04.05.2001, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte):

a) Man zeige, dass der Satz von Gauß auch für Quader im $\mathbb{R}^2$ gilt.

b) Man berechne mit dem Satz von Gauß für $A = [-1;1] \times [1;6]$ das folgende Integral

$$\int_{\partial A} -\frac{1}{2} y^2 e^x \, dx + y e^x \, dy.$$

c) Man berechne mit dem Satz von Gauß für $A = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 5\}$ das folgende Integral

$$\int_{\partial A} x^2 y \, dx + (2x - y + 2) \, dy.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte):
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Zeigen Sie:

$$\lambda(B) = \begin{cases} \int_{\partial B} x \, dy, \\ -\int_{\partial B} y \, dx, \\ \frac{1}{2} \int_{\partial B} x \, dy - y \, dx. \end{cases}$$

Aufgabe 3* (4* Punkte):
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein Kompaktum B_ε mit glattem Rand mit $\lambda(B \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon$.
Zeigen Sie: Für alle $F : U \to \mathbb{R}^n$, U offen, $U \subset \mathbb{R}^n$, B, $B_\varepsilon \subset U$ gilt:

$$\int_B \operatorname{div} \, F \, d\lambda_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} < F, \nu_\varepsilon > \, dS_{n-1},$$

wobei ν_ε das äußere Normaleneinheitsfeld von B_ε bezeichne. Dabei ist $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand und $\nu : \partial A \to \mathbb{R}$ das äußere Normaleneinheitsfeld. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $A \subset U$ und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Man beweise die folgende Greensche Formel:

$$\int_A < \text{grad } f, \text{grad } g > \, d\lambda_n + \int_A f \cdot \Delta g \, d\lambda_n = \int_{\partial A} f \cdot < \text{grad } g, \nu > \, dS_{n-1}.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte):
Sei S_n^+ die folgende Teilmenge der Einheitsspäre im $\mathbb{R}^n$:

$$S_n^+ := \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_2^2 = 1 \text{ und } x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Für $p_i \in \mathbb{R}_+$ für $i = 1, \ldots, n$ zeige man

$$\int_{S_n^+} x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n} \, dS_{n-1}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p_1+1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \Gamma\left(\frac{p_n+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{p_1+\ldots+p_n+n}{2}\right)}.$$

Hinweis: Berechne Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n} e^{-\|x\|_2^2} \, d\lambda_n$$

auf zwei verschiedene Arten.