LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
Dipl.-Math. F. Bühler, Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 23.06.2000

9. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 30.06.2000, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen wegzusammenhängende Teilmengen von $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit der natürlichen Topologie sind:

   i) die Menge $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ der positiv definiten Matrizen,

   ii) die Gruppe $SO_n(\mathbb{R}) = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ UU^t = E,\ \det U = 1\}$,

   iii) die Menge $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ der nilpotenten Matrizen in $\mathcal{M}_n((\mathbb{R})$,

   iv) die Menge $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ der diagonalisierbaren Matrizen über $\mathbb{R}$. $\boxed{8}$

b) Wie sehen die Zusammenhangskomponenten der $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ aus? $\boxed{2}$

c) i) Zeigen Sie, dass die Gruppe $GL_n(\mathbb{C})$ der invertierbaren Matrizen über $\mathbb{C}$ eine offene, wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ mit der natürlichen Topologie ist.

   ii) Bleibt die Aussage in i) richtig, wenn man $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt? $\boxed{6}$

Aufgabe 2:

a) Seien $(X, \mathcal{T})$, $(X, \mathcal{T}')$ zwei topologische Räume, $\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{T}'$ und $Y \subset X$. Zeigen Sie: Ist Y als Unterraum von $(X, \mathcal{T})$ zusammenhängend, so ist Y auch als Unterraum von $(X, \mathcal{T}')$ zusammenhängend. $\boxed{3}$

b) Zeigen Sie: Die natürliche Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ ist feiner als die Zariski–Topologie $\mathcal{T}_Z$ auf $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$. Folgern Sie:

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_Z)\ ,\ (\mathbb{C}^n, \mathcal{T}_Z) \quad \text{sind zusammenhängend .}$$ $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume und $(Y, \mathcal{T}')$ hausdorffsch. Weiter seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie:

a) $\{x \in X;\ f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen in X. $\boxed{2}$

b) $\{(x_1, x_2) \in X \times X;\ f(x_1) = g(x_2)\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$. $\boxed{2}$

c) Ist A dicht in X mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$, so folgt $f = g$. $\boxed{2}$

d) $Graph f = \{(x, f(x);\ x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times Y$. $\boxed{2}$

e) $(X, \mathcal{T})$ ist Hausdorffraum, falls f injektiv ist. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die folgenden Räume hausdorffsch sind:

a) der topologische Raum $\mathbb{R}^*$ aus Aufgabe 2, 2. Übung,

b) die obere Halbebene H aus Aufgabe 2, 2. Übung. $\boxed{6}$

Aufgabe 5: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein normaler, topologischer Raum und $(Y, \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum, $f : X \to Y$ eine surjektive stetige und abgeschlossene Abbildung. Man zeige:
$(Y, \mathcal{T}')$ ist normal. $\boxed{4}$

$\boxed{\boxed{42}}$

Die Übungsblätter sind auch im Internet erhältlich unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/SS00/Topologie