Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
Dipl.-Math. F. Bühler, Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 09.06.2000

8. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 23.06.2000, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Seien $(X_\nu, d_\nu), \nu \in \mathbb{N}$, metrische Räume, $\mathcal{T}_{d_\nu}$ die von d_ν auf X_ν induzierten Topologien und $(\eta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen, so dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu$ eine konvergente Reihe ist. Für $x = (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}, y = (y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in X := \prod_{\nu\in\mathbb{N}} X_\nu$ sei

$$d(x,y) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu \frac{d_\nu(x_\nu, y_\nu)}{1 + d_\nu(x_\nu, y_\nu)}.$$

Zeigen Sie:
a) d ist eine Metrik auf $\prod_{\nu\in\mathbb{N}} X_\nu$. $\boxed{2}$
b) Die durch d induzierte Topologie $\mathcal{T}_d$ stimmt mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ der topologischen Räume $(X_\nu, \mathcal{T}_{d_\nu})$ überein. $\boxed{4}$

Aufgabe 2: Zeigen Sie:
a) Sind $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume und $A \subset X, B \subset Y$, so gilt $\operatorname{int}(A \times B) = (\operatorname{int} A) \times (\operatorname{int} B)$. $\boxed{3}$
b) Sind $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, topologische Räume und $A_i \subset X_i, i \in I$, so gilt $\prod_{i\in I}(\operatorname{int} A_i) \supset \operatorname{int}(\prod_{i\in I} A_i)$. $\boxed{4}$
c) In b) gilt i.A. nicht Gleichheit. $\boxed{2}$

Aufgabe 3:

a) Λ heißt Gitter im $\mathbb{R}^n$, wenn es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\Lambda = \mathbb{Z}b_1 + \ldots + \mathbb{Z}b_n$. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie und zwei Gitter Λ, Λ' im $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass die Quotientenräume $\mathbb{R}^n/\Lambda$ und $\mathbb{R}^n/\Lambda'$ homöomorph sind. $\boxed{2}$

b) [Der Fall $n = 2$]. Zeigen Sie, dass der Quotientenraum $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ homöomorph zum 2–dimensionalen Torus

$$T^2 = \{(z, \omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ ; \ |z| = |\omega| = 1\} = S^1 \times S^1$$

mit der Relativtopologie von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ist. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ beliebig.
Zeigen Sie, dass es einen topologischen Raum Y und zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ gibt mit

$$\{x \in X \ ; \ f(x) = g(x)\} = A.$$

<u>Hinweis:</u> Wählen Sie für Y einen geeigneten Quotientenraum von $X \times \{1, 2\}$. $\boxed{4}$