Lehrstuhl A für Mathematik — Aachen, den 26.05.2000
Prof. Dr. R. Stens
Dipl.-Math. F. Bühler, Dipl.-Math. A. Haß

6. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 02.06.2000, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Seien $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{T}')$ topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig und surjektiv. Zeigen Sie:
a) $(Y,\mathcal{T}')$ ist separabel, falls $(X,\mathcal{T})$ separabel ist. $\boxed{2}$
b) Mit $(X,\mathcal{T})$ erfüllt auch $(Y,\mathcal{T}')$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, falls f offen ist. $\boxed{3}$

Aufgabe 2: Seien $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{T}')$ topologische Räume und $f : X \to Y$ bijektiv. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen
(i) f^{-1} ist stetig.
(ii) f ist abgeschlossen.
(iii) f ist offen. $\boxed{4}$

Aufgabe 3: Seien $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{T}')$ topologische Räume. $f : X \to Y$ sei bijektiv und stetig. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen
(i) f ist Homöomorphismus.
(ii) f ist abgeschlossen.
(iii) f ist offen.
(iv) $\mathcal{T}' = \{f(G) \mid G \in \mathcal{T}\}$. $\boxed{6}$

Aufgabe 4: Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
(i) $\mathcal{T}$ ist eine Partitionstopologie auf X.
(ii) Es existiert ein diskreter Raum Y und eine Abbildung $f : X \to Y$, so daß $\mathcal{T}$ die Initialtopologie von $(f : X \to Y)$ ist. $\boxed{4}$

Aufgabe 5: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathcal{T}_n$ die Zariski–Topologie auf $\mathbb{K}^n$ und $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine polynomiale Abbildung, d.h. es existieren Polynomfunktionen $p_1, \ldots, p_m : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit

$$p(x) = (p_1(x), \ldots, p_m(x)) \quad \text{fr alle } x \in \mathbb{K}^n.$$

Zeigen Sie, daß $p : (\mathbb{K}^n, \mathcal{T}_n) \to (\mathbb{K}^m, \mathcal{T}_m)$ stetig ist. $\boxed{3}$

$\boxed{\boxed{22}}$

Die Übungsblätter dann auch im Internet erhältlich unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/SS00/Topologie