Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
Dipl.-Math. F. Bühler, Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 19.05.2000

5. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 26.05.2000, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei p eine Primzahl. Für $0 \neq r \in \mathbb{Q}$ sei $\nu(r) \in \mathbb{Z}$ die durch $r = p^{\nu(r)}\frac{s}{t}$ mit zu p teilerfremden Zahlen $s,\, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eindeutig bestimmte Zahl. Für $x,\, y \in \mathbb{Q}$ wird nun definiert

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ p^{-\nu(x-y)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}, d)$ ein ultrametrischer Raum ist.

Aufgabe 2: Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume und $f : X \to Y$. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen

(i) f ist stetig.
(ii) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ für alle $A \subset X$.
(iii) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ für alle $B \subset Y$.
(iv) $f^{-1}(\operatorname{int}(B)) \subset \operatorname{int}(f^{-1}(B))$ für alle $B \subset Y$. $\boxed{4}$

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abgeschlossene Teilmengen von $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit der natürlichen Topologie sind:

(i) die Menge $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{S \in M_n(\mathbb{R});\ S^t = S\}$ der symmetrischen Matrizen, $\boxed{1}$

(ii) die Menge $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ A^t = -A\}$ der schiefsymmetrischen Matrizen, $\boxed{1}$

(iii) die Gruppe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{U \in M_n(\mathbb{R});\ UU^t = U^tU = E\}$ der orthogonalen Matrizen, $\boxed{1}$

(iv) die Gruppe $SL_n(\mathbb{R})$, $\boxed{1}$

(v) die Menge $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ der nilpotenten Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$. $\boxed{1}$

b) Zeigen Sie, dass $GL_n(\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$ ist. $\boxed{1}$

c) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ der positiv definiten Matrizen eine offene Teilmenge und die Menge $Psd_n(\mathbb{R})$ der positiv semi–definiten Matrizen eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ ist. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und

$$\mathrm{Aut}(X, \mathcal{T}) := \{f : X \to X; f \text{ Homöomorphismus}\} \qquad .$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{T})$ eine Gruppe (bezüglich der Komposition) ist. $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{T})$ heißt *Automorphismengruppe von* $(X, \mathcal{T})$. $\boxed{3}$

b) Zeigen Sie, dass Automorphismengruppen homöomorpher topologischer Räume isomorph sind. $\boxed{2}$

c) Geben Sie ein Beispiel an, dass aus der Isomorphie der Automorphismengruppen noch nicht die Homöomorphie der topologischen Räume folgt. $\boxed{2}$

Pavel Samuilovich Urysohn[1]

Born: 3 Feb 1898 in Odessa, Ukraine
Died: 17 Aug 1924 in Batz, Bretagne, France

Pavel Urysohn entered the University of Moscow to study physics. However after attending lectures by Luzin and Egorov at the University of Moscow he began to concentrate on mathematics.

Urysohn graduated in 1919 and became an assistant professor at the University of Moscow in 1921.

Urysohn's first work was concerned with integral equations but he soon turned to topology publishing his first publication on this topic in 1922. His reports to the Mathematical Society of Göttingen in 1923 interested Hilbert.

Urysohn collaborated with Aleksandrov and most of his important work was only published after his death at a very young age. His main results are the introduction and investigation of a class of normal surfaces, metrization theorems and the theory of dimensionality. He is remembered particuarly for 'Urysohn's lemma' which proves the existence of a certain continuous function taking values 0 and 1 on particular closed subsets.

In the summer of 1924 he set off on a European trip through Germany, Holland and France. He met Brouwer and Hausdorff who were impressed with Urysohn's results. After this he continued his holiday to Brittany where he drowned off the coast.

[1] Aus: 'The MacTutor History of Mathematics archive' der University of St Andrews, Scotland.