Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
Dipl.-Math. F. Bühler, Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 14.04.2000

1. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 28.04.2000, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Hinweise zur Vorlesung Topologie

Vorlesungen und Übungen zur Topologie finden in den folgenden Hörsälen statt:

Mo	11.45 – 13.15	Vorlesung	Hörsaal III,
Fr	11.45 – 13.15	Vorlesung	Hörsaal V,
Di	11.45 – 13.15	Übung	Hörsaal V.

Übungen: Jede Woche freitags wird zu Beginn der Vorlesung ein Übungszettel ausgegeben. Maximal zwei Personen dürfen gemeinsam abgeben. Ihre Lösungen werfen Sie bitte in den dafür vorgesehenen Kasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls A (Hauptgebäude, Raum 153). Die Übungsblätter sind auch im Internet erhältlich unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/SS00/Topologie

Die Homepage des Lehrstuhls A für Mathematik finden Sie unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de

Scheine/Klausuren: Zur Teilnahme an den Klausuren sind mindestens 1/3 der Gesamt–Übungspunkte erforderlich. Für den Erhalt eines Scheins muss eine der beiden Klausuren bestanden werden. Für den Schein wird die bessere der beiden Klausuren gewertet. Die Klausuren finden an folgenden Terminen statt:

1. **Klausur: Sa, 08.07.2000, 8.30 – 11.30 Uhr.**
2. **Klausur: Voraussichtlich Mo, 16.10.2000, 9.00 – 12.00 Uhr.**

Der genaue Ort der Klausuren wird noch bekannt gegeben.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie alle Topologien auf einer zweielementigen Menge. $\boxed{2}$

b) Sei X eine Menge mit zwei verschiedenen, nichtleeren, echten Teilmengen A, B. Wann ist

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, X, A, B\}$$

eine Topologie auf X? $\boxed{2}$

c) Sei X eine dreielementige Menge. Bestimmen Sie alle Topologien auf X, die genau 4 offene Mengen besitzen. $\boxed{2}$

Aufgabe 2:

a) Sei X eine Menge und A eine Teilmenge von X. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{T}_A := \{B\,;\, B = \emptyset \quad \text{oder} \quad A \subset B \subset X\}$$

eine Topologie auf X ist. Wie hat man A zu wählen, um die diskrete bzw. die indiskrete Topologie auf X zu erhalten? $\boxed{3}$

b) Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume.

(i) Seien X und Y disjunkt. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{T}^* := \{A \cup B\,;\, A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{T}'\}$$

eine Topologie auf $X \cup Y$ ist. $\boxed{2}$

(ii) Ist $\mathcal{T}^*$ auch noch eine Topologie, wenn X und Y nicht disjunkt sind? $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Sei X eine nichtleere Menge und ϱ eine Abbildung von $X \times X$ in $\mathbb{R}$. Setze für $f \in X$, $\varepsilon > 0$

$$S_\varepsilon(f) := \{g \in X;\ \ \varrho(g, f) < \varepsilon\}\ .$$

$S_\varepsilon(f)$ heißt eine **ε–Kugel** um f oder **ε–Umgebung** von f bezüglich ϱ.
Man zeige:

$$\mathcal{T}_\varrho := \{G \subset X;\ \ \forall g \in G\ \ \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } \ S_\varepsilon(g) \subset G\}$$

ist eine Topologie auf X. $\boxed{4}$

Aufgabe 4: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ in n Variablen mit Werten in $\mathbb{K}$. Für $I \subset \mathcal{P}$ setzt man

$$V(I) := \{x \in \mathbb{K}^n\,;\, p(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad p \in I\}.$$

Sei $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{K}^n\,;\ \text{es gibt } I \subset \mathcal{P} \text{ mit } A = \complement_{\mathbb{K}^n} V(I)\}$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{K}^n$, die sogenannte **Zariski–Topologie**. $\boxed{4}$

b) Im Fall $n = 1$ stimmt $\mathcal{T}$ mit der cofiniten Topologie auf $\mathbb{K}$ überein. Im Fall $n > 1$ ist für unendliches $\mathbb{K}$ die cofinite Topologie auf $\mathbb{K}^n$ echt gröber als $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}_{cof} \subsetneqq \mathcal{T}$). Was gilt für endliches $\mathbb{K}$? $\boxed{3}$

Felix Hausdorff[1]

Born: 8 Nov 1869 in Breslau, Germany (now Wroclaw, Poland)
Died: 26 Jan 1942 in Bonn, Germany

Felix Hausdorff graduated from Leipzig in 1891 and then taught there until 1910 when he went to Bonn. Within a year of his appointment to Leipzig he was offered a post at Göttingen but, rather surprisingly given Göttingen's reputation, he turned it down. Hausdorff worked at Bonn until 1935 when he was forced to retire by the Nazi regime. Although as early as 1932 he sensed the oncoming calamity of Nazism he made no attempt to emigrate while it was still possible.

As a Jew his position became more and more difficult. In 1941 he was scheduled to go to an internment camp but managed to avoid being sent. However by 1942 he could no longer avoid being sent to the internment camp and, together with his wife and his wife's sister, he committed suicide.

Hausdorff's main work was in topology and set theory. He introduced the concept of a partially ordered set and from 1906 to 1909 he proved a series of results on ordered sets. In 1907 he introduced special types of ordinals in an attempt to prove Cantor's continuum hypothesis. He also posed a generalisation of the continuum hypothesis by asking if 2 to the power $\aleph_n$ was equal to $\aleph_{n+1}$. Hausdorff proved further results on the cardinality of Borel sets in 1916.

Building on work by Fréchet and others, he created a theory of topological and metric spaces with Grundzüge der Mengenlehre (1914). Earlier results on topology fitted naturally into the framework set up by Hausdorff.

In 1919 he introduced the notion of Hausdorff dimension, which was a real number lying between the topological dimension of an object and 3. It is used to study objects such as Koch's curve. He also introduced the Hausdorff measure and the term 'metric space' is due to him.

[1] Aus: 'The MacTutor History of Mathematics archive' der University of St Andrews, Scotland.