Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner

Aachen, den 21. Juni 2000

11. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 30.06.2000, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (4+2+4) (Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$):
a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a, b \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine auf U differenzierbare Funktion. Zusätzlich sei die Verbindungsstrecke $S_{a,b}$ wie in X(3.1) definiert vollständig in U. Dann existiert ein $\zeta \in S_{a,b}$ mit

$$f(b) - f(a) =< \operatorname{grad} f(\zeta), (b-a) >$$

Hinweis: Man verwende den eindimensionalen Mittelwertsatz.
b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto (\cos t, \sin t)^t$. Man zeige, dass ein Mittelwertsatz wie in Teil a) (mit DF statt $\operatorname{grad} f$) nicht gelten kann, indem man sich geeignete a und b wählt.
c) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a, b \in G$ und $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine auf U differenzierbare Funktion.Wie immer seien $F_1, \cdots, F_m$ die Komponenten von F. Sind $a, b \in U$, so dass $S_{a,b} \subset U$, dann existieren $\zeta_1, \cdots, \zeta_m \in S_{a,b}$, so dass

$$F(b) - F(a) = F'[\zeta_1, \cdots, \zeta_m](b-a),$$

wobei

$$F'[\zeta_1, \cdots, \zeta_m] := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\zeta_1)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(\zeta_1)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m(\zeta_m)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m(\zeta_m)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (2+2):
a) Man verwende das totale Differential zur näherungsweisen Berechnung von $(1,02)^3 + (1,99)^3$.
b) Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f(x) = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 (3): (Volumen eines n-dimensionalen Quaders)
Berechnen Sie n-dimensionale Quader mit vorgebener Summe der Kanten mit minimalem Umfang bzw. maximalen Volumen.

Aufgabe 4 (3*):(Wirkungsverlauf von Medikamenten)
Die Wirkung $W(x,t)$, die x Einheiten eines Medikaments t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, wird in einigen Fällen durch

$$W(x,t) = x^2(a-x)t^2e^{-t}$$

dargestellt. Bestimme die Dosis x und die Zeit t so, dass die Wirkung maximal ist.