Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner Aachen, den 12. Mai 2000

6. Übung zur Analysis II

Abgabe: Donnerstag, 18.05.2000, 17.00 Uhr

Aufgabe 1 (2+3):

a) Man untersuche die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\geq 1}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

   i) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\,x}, \qquad x \in [0;1],$

   ii) $f_n(x) = \dfrac{n\,\sin(nx)}{n^2+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

b) Gegeben seien die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$ mit $f_n, g_n : D \to \mathbb{R}$ und $f_n \underset{glm}{\longrightarrow} f$, $g_n \underset{glm}{\longrightarrow} g$ auf D. Zeigen Sie:

   i) $(f_n + g_n) \underset{glm}{\longrightarrow} (f+g)$ auf D.

   ii) $(f_n \cdot g_n)_{n\geq 1}$ ist i.a. nicht gleichmäßig konvergent auf D.

   iii) Sind f und g auf D beschränkt, so gilt auch $(f_n \cdot g_n) \underset{glm}{\longrightarrow} (f \cdot g)$ auf D.

Aufgabe 2 (4):

a) Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f auf D konvergiert. Man zeige:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

für alle Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in D$.

b) Man zeige:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \left(\frac{n}{n+2}\right)^k = e^2.$$

Aufgabe 3 (2+3):

a) Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n(x) = n\,x\,e^{-nx}$ auf $[0;1]$. Man überprüfe die Beziehung

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

b) Überprüfen sie für die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $\mathbb{R}$ die Beziehung

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx} f_n(x)\right):$$

i) $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n}$, ii) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k^4x)}{k^2}$, iii) $f_n(x) = \dfrac{\cos(n^2x)}{n^3}$.

Aufgabe 4 (2): Gegeben sei die Dirichletsche Sprungfunktion

$$D : [0;1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

und eine Abzählung der rationalen Zahlen $(q_j)_{j\geq 1}$. Man untersuche die Funktionenfolge

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & x \in \{q_j | j = 1, \ldots n\}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Hinweis: Die Abgabe der Übung wird noch bis zum Freitag, den 19.05.2000, 12 Uhr akzeptiert.