Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner

Aachen, den 14. April 2000

2. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 21.04.2000, 11.45 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte): Sei $f : [-a; a] \to \mathbb{R}, a > 0$, integrierbar. Beweisen Sie

a) Ist f ungerade, d. h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a; a]$, so gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

b) Ist f gerade, d. h. $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-a; a]$, so gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Aufgabe 2 (4 Punkte): Seien f, g integrierbar auf $[a; b]$. Beweisen Sie mittels der Hölderschen Ungleichung die Ungleichung von Minkowski (für Integrale), d. h. für $p \geq 1$ ist folgendes zu zeigen:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Aufgabe 3 (4 Punkte):

a) Sei $a < b$, $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a; b]$ und $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Dann folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a; b]$.

b) Man zeige, dass die Stetigkeit im Teil a) nicht durch Riemann-Integrierbarkeit ersetzt werden kann.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

a) Man beweise für stetige Funktionen $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

b) Man beweise:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j^2 + n^2} = \frac{\pi}{4}$, (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j + n} = \log 2$.

Dabei darf man folgende Integrale benutzen:

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log b - \log a \quad \text{für} \quad a, b > 0 \tag{1}$$

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan b - \arctan a \tag{2}$$

Nachdem Archimedes erkannt hatte, dass man mit einem Hebel große Dinge in Bewegung setzen kann, war ein physikalischer Begriff fällig, der nicht die anzuwendende Kraft beschrieb, sondern den „Aufwand" eine „Aufgabe" zu vollbringen. Das Prinzip des Hebels war die Entdeckung, dass die aufzuwendende Kraft bzgl. der Erfüllung einer „Aufgabe" keine Invariante ist. Der fällige Begriff war die „Arbeit", die den „Aufwand" beschreibt, ein Objekt (z.B. ein Schiff) von einem Punkt a (auf dem Meeresspiegel) zu einem Punkt b (oberhalb desselben) zu befördern. (Zur Verteidigung von Syrakus gegen den Angriff der Römer soll Archimedes Kräne entworfen haben, die feindliche Schiffe aus dem Meer hochheben und aus geeigneter Höhe wieder ins Meer zurückfallen lassen.) Für konstante Kraft gilt das Gesetz

$$\text{Arbeit} \ = \ \text{Kraft} \ \times \ \text{Weg} \ .$$

Bei nicht konstanter Kraft wäre ein Ansatz, obiges Gesetz zumindest für sehr kurze Strecken anzunehmen. Für eine längs der x-Achse gerichtete Kraft F ist die Arbeit W dann durch

$$W = \int_a^b F(x)\, dx$$

gegeben, wobei der *Weg* vom Punkt a zum Punkt b auf der x-Achse reicht.

Aufgabe 5 (* 4 Sonderpunkte): Der Betrag F der Rückstellkraft einer Feder ist proportional zu ihrer Verlängerung (Auslenkung aus der Ruhelage), also $F = k\,x$, wenn x die Verlängerung (!) bezeichnet (Hookesches Gesetz).

a) Wie groß ist die geleistete Arbeit, wenn die Feder aus der Ruhelage um die Strecke x_0 gedehnt wird.

b) Eine entspannte Feder habe die Länge 1. Bei der Länge $x_1 > 1$ habe sie die Rückstellkraft F_1. Wieviel Arbeit ist nötig, um sie von der Länge x_1 auf die Länge $x_2 > x_1$ zu dehnen?

c) Die in Teil b) ermittelte Arbeit W wird nun nochmals aufgebracht, Zeiten um die Feder weiter zu dehnen. Wie lang ist die Feder danach?

Es ist angebracht, die Kraft als Vektor aufzufassen. In der Schule wurde z.B. im Hookeschen Gesetz ein Minuszeichen eingeführt, was die Richtung der Kraft, die gegen die Auslenkung gerichtet ist, ausdrückt.