§1 Lokale Lipschitzstetigkeit

Dies ist ein Vorschlag, wie wir uns eine Lösung vorgestellt hatten. In diesem Kapitel ist die Definitionsmenge immer eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Natürlich kann man als Definitionsmengen und Wertemengen auch Teilmengen normierter Vektorräume zulassen, wobei dann die Bedingung (1) übergeht in

$$(1') \qquad \|f(x_1) - f(x_2)\|_2 \leq L\|x_1 - x_2\|_1 \quad \forall x_1, x_2 \in U_\delta(x_0) \cap D.$$

wobei $f : V \to W$ und $(V, \|\cdot\|_1), (W, \|\cdot\|_2)$ normierte Vektorräume sind. Viele Ergebnisse gelten dann analog. Um den Beweis von Satz (0.13) analog übertragen zu können, benötigt man, dass D konvex ist. Nun aber zum eigentlichen Begriff der lokalen Lipschitzstetigkeit.

(0.1) Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *lokal lipschitzstetig in* D, wenn für alle $x_0 \in D$ ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$ existieren, so dass

$$(1) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in U_\delta(x_0) \cap D.$$

(0.2) Bemerkung. a)In (1) läßt sich $U_\delta(x_0)$ durch eine beliebige Umgebung von x_0 ersetzen.
b) L hängt natürlich von x_0 und der gewählten Umgebung ab.

(0.3) Lemma. *Sei $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*
a) f lipschitzstetig $\Rightarrow$ f lokal lipschitzstetig.
b) f lokal lipschitzstetig $\Rightarrow$ f stetig.

Beweis: zu a) gilt per Definition, wähle $U = D$ für alle $x_0 \in D$.
zu b) Sei $x_0 \in D$. Dann existieren $\delta_1, L_1 > 0$, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L_1|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in U_{\delta_1}(x_0) \cap D.$$

Sei $\varepsilon > 0, \delta := \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{L_1}\right\}$. Dann gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < L_1\delta \leq \varepsilon \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D.$$

$\square$

Dass die Umkehrungen im Allgemeinen nicht gelten, zeigt uns das folgende

(0.4) Beispiel. a) Jedes Polynom ist lokal lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$, aber x^2 ist nicht lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$.
Der erste Teil der Aussage folgt aus Satz (0.8). Der zweite Teil folgt aus $|x_2^2 - x_1^2| = |x_2 + x_1||x_2 - x_1|$, so dass man zu jedem $L > 0$ Punkte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ finden kann, so dass $|x_2 + x_1| > L$ gilt.
Man kann sogar zeigen, dass alle ganzrationalen Funktionen, deren Grad mindestens 2 ist, nicht lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$ sind ($\rightarrow$ Aufgabe 4).
b) $\sqrt{x}$ ist stetig auf $[0;1]$, aber nicht lokal lipschitzstetig.
Wähle $x_k = \frac{1}{k}$. Da

$$\frac{|\sqrt{x_k} - \sqrt{0}|}{|x_k - 0|} = \frac{|\sqrt{1/k}|}{|1/k|} = \sqrt{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty,$$

ist $\sqrt{x}$ in 0 nicht lokal lipschitzstetig.

(0.5) Lemma. *Seien $a \in \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ lokal lipschitzstetige Funktionen. Dann sind $f+g$ und $a \cdot f$ lokal lipschitzstetig. Also ist die Menge aller lokal lipschitzstetigen Funktionen auf D ein Unterraum der stetigen Funktionen, der den der lipschitzstetigen Funktionen umfasst.*

Beweis: (i) Sei $x_0 \in D$. Dann existieren $\delta_1, \delta_2 > 0$ und $L_1, L_2 > 0$, so dass

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq L_1|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in U_{\delta_1}(x_0) \cap D, \\ |g(x_1) - g(x_2)| &\leq L_2|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in U_{\delta_2}(x_0) \cap D. \end{aligned}$$

Wähle $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ und $L := L_1 + L_2$. Dann gilt:

$$|f(x_1) + g(x_1) - g(x_2) - f(x_2)| \leq (L_1 + L_2)|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in U_\delta(x_0) \cap D.$$

(ii)

$$|a| \mid f(x_1) - f(x_2) \mid \leq |a|L_1|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in U_{\delta_1}(x_0) \cap D,$$

also mit $\delta = \delta_1$ und $L = |a|L_1$ die Behauptung. Der Rest folgt aus Korollar (0.3) und Beispiel (0.4)b). □

(0.6) Definition.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\circ(D) &:= \text{Raum aller auf D lokal lipschitzstetigen Funktionen} \\ \mathcal{L}^1(D) &:= \text{Raum aller auf D lipschitzstetigen Funktionen} \end{aligned}$$

Fasst man nun Korollar (0.3) und Beispiel (0.4) zusammen, ergibt sich

(0.7) Bemerkung.

$$C(D) \supsetneqq \mathcal{L}^{\circ}(D) \supsetneqq \mathcal{L}^{1}(D). \tag{3}$$

(0.8) Satz. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f lokal lipschitzstetig.*

Beweis: Analysis Skript VI (1.4). □

(0.9) Bemerkung. Dieser Satz gilt auch für beliebiges D, allerdings muss man dann die Ableitung etwas anders definieren, nämlich

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{falls existent.}$$

Dafür kann man analog zur Vorlesung eine Theorie entwickeln.

Dass die Umkehrung nicht gilt, erkennt man an Teil a) des folgenden Beispiels.

(0.10) Beispiel. a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$ nach Dreiecksungleichung aber in 0 nicht differenzierbar.
b) Alle nichtkonstanten Treppenfunktionen sind nicht lokal lipschitzstetig, da nicht stetig.

(0.11) Satz. *Seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ lokal lipschitzstetige Funktionen mit $g(D_2) \subset D_1$. Dann ist $f \circ g$ lokal lipschitzstetig. Also ist der Raum der lipschitzstetigen Funktionen sogar eine Funktionenalgebra.*

Beweis: Sei $x_0 \in D_2$. Dann existieren $\delta_1, L_1 > 0$, so dass

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L_1 |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in U_{\delta_1}(x_0) \cap D_2. \tag{1}$$

Da $g(x_0) \in D_1$, existieren $\delta_2, L_2 > 0$, so dass

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq L_2 |\xi - \eta| \quad \forall x \in U_{\delta_2}(g(x_0)) \cap D_1. \tag{2}$$

Für $\delta = \min\left\{\frac{\delta_2}{L_1}, \delta_1\right\}$ folgt

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g(x_0)| &\leq L_1 |x_1 - x_0| \leq \delta_2 \quad \text{und} \\ |g(x_2) - g(x_0)| &\leq L_1 |x_2 - x_0| \leq \delta_2 \quad \forall x_1, x_2 \in U_\delta(x_0) \end{aligned}$$

und damit folgt aus $g(x_1), g(x_2) \in U_{\delta_2}(g(x_0))$ die folgende Gleichung für alle $x_1, x_2 \in U_\delta(x_0)$:

$$\begin{aligned} |f(g(x_1)) - f(g(x_2))| &\leq L_2 |g(x_1) - g(x_2)| \\ &\leq L_2 L_1 |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

also mit $L := L_2 L_1$ die Behauptung. $\square$

Weitere Eigenschaften sind zusammengefasst in

(0.12) Lemma. *Sei $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ lokal lipschitzstetig.*
a) D kompakt $\Rightarrow F$ ist beschränkt.
b) D kompakt $\Rightarrow f$ ist integrierbar.
c) Sei $(f_k)_k$ eine Folge gleichmäßig konvergenter Funktionen, die lipschitzstetig sind. Im Allgemeinen ist dann f nicht lokal lipschitzstetig.
d) Falls D nicht kompakt ist, muss f weder beschränkt noch (uneigentlich) integrierbar sein.

Beweis: zu a) folgt aus der Stetigkeit von f.
zu b) folgt aus der Stetigkeit und Beschränktheit.
zu d) $f : (0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ ist lokal lipschitzstetig, aber nicht integrierbar oder beschränkt.
$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist lokal lipschitzstetig und nicht integrierbar, aber beschränkt.
zu c) Wähle $f_k(x) = \sqrt{x + \frac{1}{k}},\ f(x) = \sqrt{x}\ D = [0, b]$. Dann folgt, dass $\|f - f_k\| = \sup\limits_{x \in [0,b]} |f(x) - f_k(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$
und somit die gleichmäßige Konvergenz von f_k gegen f. Aber $\sqrt{x}$ ist auf $[0, b]$ nicht lokal lipschitzstetig. $\square$

(0.13) Satz. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ kompakt $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann lokal lipschitzstetig, wenn f lipschitzstetig ist.*

Beweis: „$\Rightarrow$" Korollar 0.3.
„$\Leftarrow$" Sei $f : D \to \mathbb{R}$ lokal lipschitzstetig. Dann existiert für alle $x_0 \in D$ eine offene Umgebung $U(x_0)$, so dass $f|_{U(x_0)}$ lipschitzstetig ist. Betrachte die offene Überdeckung $\{U(x_0) | x_0 \in D\}$ von D. Da D kompakt ist, kann man eine endliche Teilüberdeckung finden

$$M = \{U_i := U(x_i) | i \in I,\ |I| < \infty\}$$

Sei $x_1, x_2 \in D$. Da $x_1, x_2 \in U_i$ der triviale Fall ist, sei ab jetzt $x_1, x_2 \notin U_i \cap U_j, x_1 \in U_i, x_2 \in U_j$.
1.Fall: $U_i \cap U_j \cap D \neq \emptyset$.
Da U_i und U_j beides δ-Umgebungen in $\mathbb{R}$ sind, existiert ein $x_3 \in U_i \cap U_j \cap D$ und $|x_1 - x_2| = |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$
Daraus folgt

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - f(x_3)| + |f(x_3) - f(x_2)| \\ &\leq L_i|x_1 - x_3| + L_j|x_3 - x_2| \\ &\leq \max\{L_i, L_j\}|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

2. Fall $U_i \cap U_j \cap D = \emptyset$.
a) $d(U_i \cap D, U_j \cap D) > 0$. Dann kann man oBdA annehmen, dass $d(U_i, U_j) > 0$, also folgt

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{2M}{d(U_j, U_i)}$$

wobei $M = \max_{x \in D} |f(x)|$ ist.
b) $d(U_i \cap D, U_j \cap D) = 0$.
Dann existieren Folgen $(z_k^{(i)})_k \subset U_i$ und $(z_l^{(j)})_l \subset U_j$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein N_0 existiert mit

$$|z_k^{(i)} - z_l^{(j)}| \leq \frac{1}{n} \quad \forall k, l \geq N_0.$$

Sei z_0 ein Häufungspunkt der Folge $(z_k^{(i)})_k$, also auch ein Häufungspunkt der Folge $(z_k^{(j)})_k$. Weiterhin ist $z_0 \notin U_i, z_0 \notin U_j$, da U_i,U_j offen sind und $z_0 \in D$, da D abgeschlossen ist. Damit existiert ein $r \in I$, so dass $z_0 \in U_r$, da $z_0 \in D$. Wende nun auf (x_i, z_0) und (x_j, z_0) den ersten Fall bzw. 2a an. Dieses Verfahren endet nach endlich vielen Schritten und liefert die Behauptung.$\square$

Folgendes Beispiel zeigt, dass die Ableitung einer lokal lipschitzstetigen Funktion nicht wieder lokal lipschitzstetig sein muss.

(0.14) Beispiel. $b > 0$, $f : [-b, b] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

f ist lipschitzstetig, da differenzierbar, aber $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ ist bekannterweise nicht stetig in 0, also nicht lokal lipschitzstetig.

(0.15) Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt (also ist f auch integrierbar) und lipschitzstetig (Stetigkeit genügt auch). Dann ist $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(y)dy$ lipschitzstetig.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} |F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} M\,dt \right| \\ &= M|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a;b] \end{aligned}$$

□

(0.16) Bemerkung. Es genügt auch f generell als (eigentlich) integrierbar vorauszusetzen, denn daraus folgt die Beschränktheit und mehr wurde im Beweis nicht benutzt.

Natürlich kann man sich noch viele interessante Fragen stellen, die hier als Aufgaben formuliert werden. Die Lösung sei dem interessierten Leser überlassen.

(1) Aufgabe. Unter welchen Voraussetzungen ist $\frac{1}{g}$ lokal lipschitzstetig?

(2) Aufgabe. Unter welcher Zusatzbedingung kann man bei gleichmäßiger Konvergenz die lokale Lipschitzstetigkeit übertragen?

(3) Aufgabe. Gibt es einen Zusammenhang zwischen (lokal) lipschitzstetig und der Umkehrfunktion?

(4) Aufgabe. Gilt Satz 0.13 für allgemeine Vektorräume und D kompakt (nicht notwendigerweise konvex)?

(5) Aufgabe. Zeige den Zusatz zu Beispiel (0.4)a).

Um sich diesem Thema zu nähern, kann man sich zum Beispiel zuerst einmal folgende Bücher ansehen:

- M.Barner, F.Flohr, Analysis I, de Gruyter

- H.Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Teubner Stuttgart

Allerdings wird in diesen Büchern nur die Lipschitzstetigkeit behandelt. Oft wird die Lipschitzstetigkeit in der Literatur auch als Dehnungsbeschränktheit bezeichnet.